

# SUPERPREVODNOST

PAVEL KOS

Fakulteta za matematiko in fiziko  
Univerza v Ljubljani

V članku sem predstavil glavne značilnosti superprevodnikov. V prvem delu sem opisal magnetne lastnosti. Nato si poglobljeje pogledamo teorijo superprevodnosti, kjer med drugim rešimo poenostavljen Cooperjev problem. Ilustriramo pojav privlačnega potenciala zaradi fononske interakcije. Na koncu sem opisal tudi nekaj značilnih lastnosti visokotemperaturnih superprevodnikov.

## SUPERCONDUCTIVITY

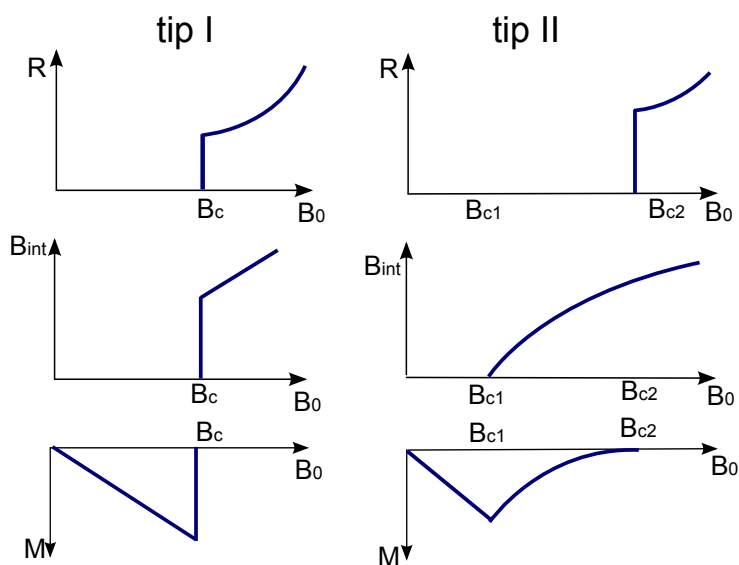
This article presents the main characteristics of superconductors. Firstly, magnetic properties are described. Then we take a closer look at the theory of superconductivity, where among other things, a simplified Cooper problem is solved. Then the emergence of an attractive potential due to phonon interactions is illustrated. In the end, some characteristic features of high-temperature superconductors are described.

### 1. Uvod

H. Kamerling Onnes je leta 1908 uspel utekočiniti helij, kar je omogočilo doseganje nizkih temperatur. Onnes je odkril pojav superprevodnosti leta 1911, ko je proučeval upornost kovin pri nizkih temperaturah. Upornost živega srebra je pri 4.2 K skokovito padla na nič. Temperaturo, pod katero material postane superprevoden, imenujemo kritična temperatura  $T_c$  [1].

Danes vemo, da večina kovin pri dovolj nizki temperaturi postane superprevodna. Kovina z najvišjo temperaturo prehoda je niobij (Nb) z 9.2 K. Leta 1986 je bil odkrit prvi visokotemperaturni superprevodnik. Nekateri visokotemperaturni superprevodniki preidejo v superprevodno stanje celo nad temperaturo tekočega dušika.

### 2. Magnetne lastnosti superprevodnikov

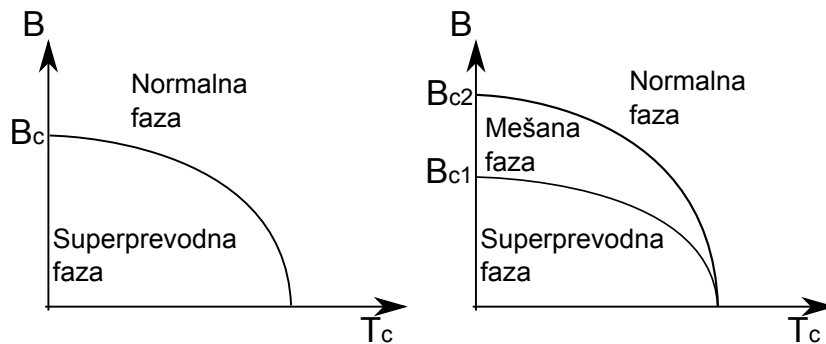


**Slika 1.** Prevodnost, polje in magnetizacija tipa 1 in tipa 2 superprevodnika v odvisnosti od zunanjega magnetnega polja. Povzeto po:[2].

Superprevodniki kažejo dve glavni lastnosti: idealno prevodnost in Meissnerjev pojav. Meissnerjev pojav je lastnost superprevodnikov, da povsem izrinejo magnetno polje iz svoje notranjosti in so zato idealni diamagneti. Da bi razumeli razliko med idealnim prevodnikom in superprevodnikom, si pogledajmo naslednji zgled. Zamislimo si kos materiala, ki ga ohladimo pod kritično temperaturo v odsotnosti zunanjega magnetnega polja. Potem ta kos snovi postavimo v zunanje magnetno polje. Po zakonu indukcije se bo induciral električni tok, ki bo ohranil ničelno magnetno polje v idealnem prevodniku. Sedaj si predstavljajmo, da kos idealnega prevodnika ohladimo pod kritično temperaturo prehoda v zunanjem magnetnem polju, ki ga potem odstranimo. V materialu bi se induciral električni tok, ki bi ohranil magnetni pretok in polje v notranjosti na prvotni vrednosti. Superprevodnik pa bi magnetno polje izrinil iz notranjosti.

Superprevodnike glede na njihov odziv na zunanje magnetno polje delimo na superprevodnike tipa 1 in tipa 2. Ko povečujemo magnetno polje, se superprevodnik tipa 1 obnaša kot idealni diamagnet do nekega kritičnega polja  $B_c$ , nato preide v normalno fazo. Tip 2 se obnaša enako do nižjega kritičnega polja  $B_{c1}$ . Nad višjim kritičnim poljem  $B_{c2}$  preide snov v normalno stanje. V vmesnem področju je superprevodnik v mešanem stanju. Superprevodnik prebadajo kvantizirane linije magnetnega pretoka. Kvant pretoka magnetnega polja je  $\Phi_0 = h/2e$ . V področju prebadanja je material v normalnem stanju. Material se še vedno obnaša diamagnetno, vendar ne kot idealni diamagnet. Tipični predstavniki tipa 1 so kovine, tipa 2 pa vsi superprevodniki z višjimi  $T_c$ . Primerjavo prikazujeta sliki 1 in 2.

Mešano stanje je drugačno od vmesnega stanja. Vmesno stanje nastane v vzorcu netrivialne geometrije, saj se tam izmenjujejo področja normalne in superprevodne faze, ker je to energijsko ugodneje.



Slika 2. Fazni diagram za superprevodnika tipa 1 in tipa 2. Povzeto po:[3].

### 3. Enačba bratov London

Brata London sta leta 1935 podala preprost model, ki fenomenološko opiše dogajanje v superprevodniku.

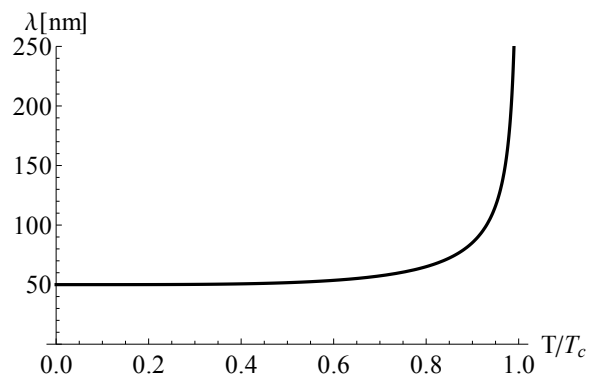
Iz njunega modela sledi, da magnetno polje eksponentno upada na ravnem robu superprevodnika kot [4].

$$B(x) = B_e e^{-x/\lambda}. \quad (1)$$

Z  $x$  smo označili oddaljenost od roba. V enačbi nastopa  $\lambda = \sqrt{\frac{m}{n_s e^2 \mu_0}}$  Londonova vdorna globina. Masa elektrona je označena z  $m$ , naboj z  $e$ ,  $n_s$  pa predstavlja številsko gostoto elektronov.

Očitno je vdorna globina odvisna od  $n_s$ , ki je odvisen od temperature, kar prikazuje sklika 3.

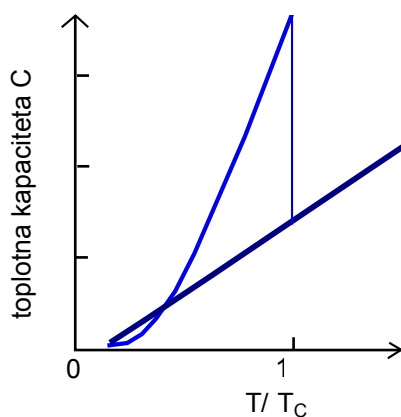
## Superprevodnost



Slika 3. Londonova vdorna globina v odvisnosti od temperature. Povzeto po:[5].

### 4. Teorija superprevodnosti

Leta 1957 so Barden, Cooper in Schrieffer objavili zelo uspešno mikroskopsko teorijo superprevodnosti, danes poznano kot teorija BCS. Teorija je za ta sestavek prezahtevna, bom pa vseeno podal glavne ideje.



Slika 4. Toplotna kapaciteta superprevodnika. Ravna črta ustreza normalni fazi, zakrivljena pa superprevodni fazi. Vir:[2].

#### 4.1 Energijska reža

Kot smo videli v prejšnjem poglavju in na sliki 3, se gostota superprevodnih elektronov  $n_s$  spreminja od nič pri  $T_c$  do celotne gostote (prevodnih) elektronov pri temperaturi 0 K. To obnašanje nakazuje obstoj energijske reže  $\Delta$  med superprevodnimi in normalnimi elektroni.

Za zelo nizke temperature ( $T \ll T_c$ ) pričakujemo odvisnost števila normalnih elektronov oblike  $e^{-\Delta(0)/k_B T}$ , kjer je  $k_B$  Boltzmannova konstanta. To se odraža v toplotni kapaciteti, h kateri prispevajo elektroni (slika 4, del ko gre T proti 0). To se sklada z eksperimentalnimi podatki. Zato tudi pričakujemo  $\Delta(0) \approx k_B T_c$ .

Neposredni dokaz energijske reže je absorpcija elektromagnetnih valov. Pri nizkih frekvencah je zelo nizka, nato hitro naraste pri frekvenci podani z:

$$h\nu = 2\Delta(0) . \quad (2)$$

Faktor 2 nastopa tu zato, ker absorpcija fotona vzbudi dva elektrona preko energijske reže. Teorija BCS podaja razlago, da se elektroni vežejo v pare, ki jih imenujemo Cooperjevi pari. Valovna funkcija vseh parov mora biti identična, da dosežemo minimum vezavne energije vsakega para. Za superprevodnost pravimo da je kolektivno vezano stanje<sup>1</sup>.

Pri temperaturi 0 K so vsi (prevodniški) elektroni superprevodni, pri višjih temperaturah pa so nekateri vzbujeni. Ker v skupni valovni funkciji nastopa manj elektronov, se energijska reža zmanjša.

Skupna valovna funkcija nakazuje na višjo urejenost in nižjo entropijo superprevodnega stanja.

## 4.2 Cooperjev problem

Cooper je leta 1956 rešil preprost model, ki je bil inspiracija za BCS teorijo.

Iz kvantne mehanike se spomnimo, da v 1D primerih za vsak še tako majhen privlačen potencial obstaja vezano stanje. V treh dimenzijah temu ni tako. Za delec v sferično simetrični potencialni jami velja, da mora biti jama globoka vsaj:

$$V_0^{min} = -\frac{\pi^2}{8} \frac{\hbar^2}{ma^2} . \quad (3)$$

Z a smo označili polmer jame, z m pa maso delca[6].

Lotimo se sedaj Cooperjevega problema. Problem predpostavi šibek privlačni potencial med dvema elektronoma nasprotnega spina. Ostali elektroni vplivajo na elektrona le s Paulijevim izključitvenim načelom tako, da tvorijo Fermijevo sfero in zapolnijo nižje energijske nivoje. Zapišimo Schrödingerjevo enačbo za elektrona:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2 + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2))\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (4)$$

V nadaljevanju zapišemo enačbo (4) v težiščnem koordinatnem sistemu. Vektor težišča sistema je  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ . Drugi neodvisni vektor je  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ .  $\mu = m/2$  je reducirana masa in  $M = 2m$  skupna masa.

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_R^2\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) - \frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_r^2\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) + V(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = E\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}). \quad (5)$$

Ker je potencial odvisen le od  $\mathbf{r}$ , lahko rešitev separiramo:

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \Psi(\mathbf{r})e^{i\mathbf{K}\mathbf{R}}, \quad (6)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\Psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) = \left(E - \frac{\hbar^2 K^2}{2M}\right)\Psi(\mathbf{r}). \quad (7)$$

Uspešno smo prevedli problem dveh teles na problem enega telesa. Uporabimo Fourierovo transformacijo in prevedimo diferencialno enačbo na integralno. Označimo  $\tilde{E} = E - \frac{\hbar^2 K^2}{2M}$  in  $\epsilon_k = \hbar^2 k^2 / (2m)$ . Pišimo tudi:

$$\Psi(\mathbf{k}) = \int \Psi(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}. \quad (8)$$

<sup>1</sup>Feromagnetizem je bolj znan primer - urejenost domen povzroča polje in zato je vezavna energija vsakega elementa domene večja.

Po Fourierovi transformaciji dobimo:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \Psi(\mathbf{k}) + \int V(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \Psi(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \tilde{E} \Psi(\mathbf{k}). \quad (9)$$

Upoštevajmo sedaj konvolucijski teorem:

$$V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\psi(\mathbf{r})) * \mathcal{F}(V(\mathbf{r}))) \quad (10)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} d^3\mathbf{k}' \int \Psi(\mathbf{k}') V(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'') d^3\mathbf{k}'' . \quad (11)$$

Upoštevamo

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (12)$$

ter zamenjamo vrstni red integriranja:

$$\int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (13)$$

$$= \int e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int V(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \Psi(\mathbf{k}') d^3\mathbf{k}'' d^3\mathbf{k}' \quad (14)$$

$$= \int V(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \Psi(\mathbf{k}') d^3\mathbf{k}'. \quad (15)$$

Dobimo integralno enačbo:

$$\tilde{E} \Psi(\mathbf{k}) = 2\epsilon_k \Psi(\mathbf{k}) + \int V(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \Psi(\mathbf{k}') d^3\mathbf{k}'. \quad (16)$$

Definirajmo funkcijo reže:

$$\Delta(\mathbf{k}) = (\tilde{E} - 2\epsilon_k) \Psi(\mathbf{k}). \quad (17)$$

$$\Delta(\mathbf{k}) = - \int \frac{\Delta(\mathbf{k}') V(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{2\epsilon_k - \tilde{E}} d^3\mathbf{k}'. \quad (18)$$

Sedaj moramo ugotoviti, po katerem delu prostora valovnih vektorjev  $\mathbf{k}$  moramo integrirati. Naša elektrona se nahajata preko roba Fermijeve sfere v območju nezasedenih stanj. To je ključna ugotovitev pri tem problemu. Predpostavimo sferično simetričnost v  $\mathbf{k}$  prostoru. Integral v  $\mathbf{k}$  prostoru prevedemo na integral po energiji  $d^3k = \rho(\epsilon) d\epsilon$ . Da lahko pridemo do končnega rezultata privzemimo, da imamo konstanten privlačen potencial v  $\mathbf{k}$  prostoru<sup>2</sup>  $V(\mathbf{k}) = -V_0$ .

$$\Delta = V_0 \rho_F \int_{\epsilon_F}^{\epsilon_F + \hbar\omega_c} \frac{\Delta d\epsilon}{2\epsilon - \tilde{E}} . \quad (19)$$

$\omega_c$  je najvišja frekvenca, do katere integriramo. Po analogiji z Debyevim modelom vzemimo za zgornjo frekvenco kar Debyevo frekvenco  $\omega_D$ . Ker integriramo po kratkem intervalu, lahko funkcijo reže izpostavimo in izvedemo integral.

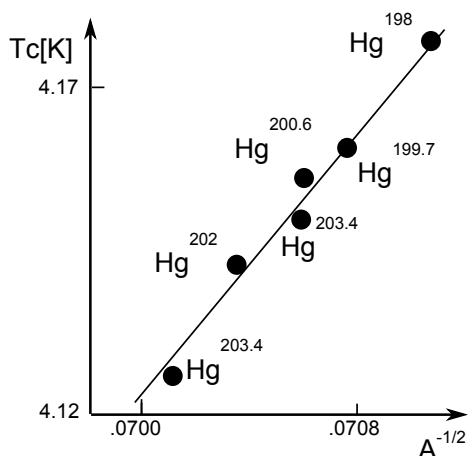
$$\frac{2}{V_0 \rho_F} = \log \left( \frac{2\hbar\omega_D + 2\epsilon_F - \tilde{E}}{2\epsilon_F - \tilde{E}} \right) . \quad (20)$$

Upoštevamo, da je  $2\hbar\omega_D \gg 2\epsilon_F - \tilde{E}$ . Dobimo vezavno energijo:

$$\epsilon_b = 2\epsilon_F - \tilde{E} = 2\hbar\omega_D e^{-\frac{2}{V_0 \rho_F}} . \quad (21)$$

Pokazali smo, da dobimo vezano stanje za vsak še tako majhen privlačen potencial.

<sup>2</sup>To ustreza delta potencialu  $V(\mathbf{r}) \propto \delta(\mathbf{r})$



**Slika 5.** Graf prikazuje odvisnost kritične temperature v odvisnosti od masnega števila izotopa živega srebra. Povzeto po:[7].

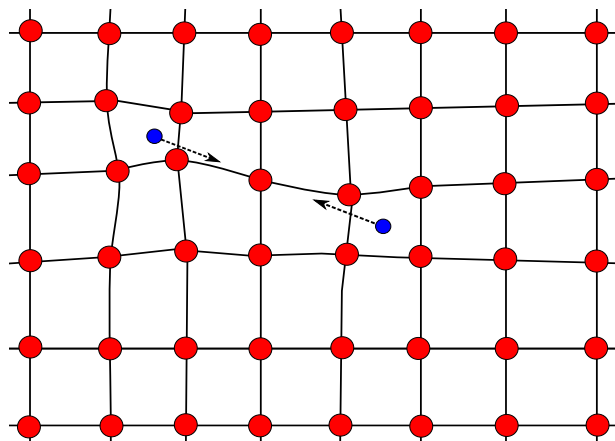
### 4.3 Privlačna interakcija

Privlačna interakcija med elektroni je na prvi pogled nenavadna, saj med izoliranimi elektroni deluje odbojna električna sila. Vendar je v kovini odbojna interakcija močno oslABLJENA zaradi senčenja naboja.

Zanimiv je eksperiment iz leta 1950, ko so proučevali kritično temperaturo v odvisnosti od izotopa živega srebra (slika 5). Ta nakazuje, da imajo tudi ioni pomembno vlogo pri interakcijah med elektroni.

Klasični superprevodniki so kovine, pri katerih so za specifično toploto pri višjih temperaturah odločilni fononi<sup>3</sup>. To nas napelje k ideji, da bi bili pomembni tudi za superprevodnost.

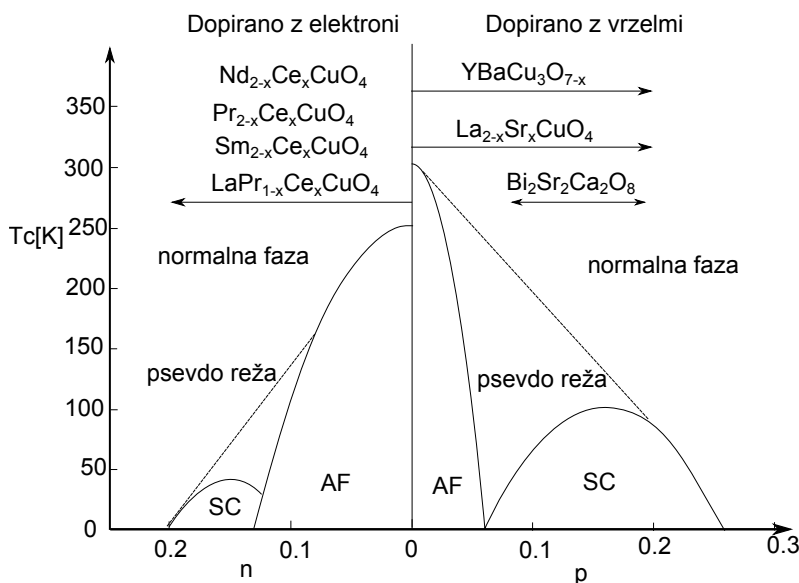
Privlačno interakcijo pojasnimo kot sklopitev elektronov s fononi. Ko se elektron giblje skozi kristal, privlači pozitivne ione in za seboj pušča področje večje gostote pozitivnega naboja. Ko drug elektron pride v to področje, ga gostota pozitivnega naboja privlači. Ta proces si shematično predstavljamo, kot da sta si elektrona izmenjala virtualni delec fonon. Shematično privlak prikazuje slika 6.



**Slika 6.** Privlak nastane zaradi deformacije mreže. Rdeče kroglice predstavljajo pozitivno nabite ione mreže, modre kroglice pa superprevodna elektrona, ki tvorita Cooperjev par. Povzeto po:[7].

<sup>3</sup>Spomnimo se Debyevega modela.

### 5. Visokotemperaturni superprevodniki



**Slika 7.** Fazni diagram kupratov v odvisnosti od dopiranja z vrzelim (p) ter elektroni (n). SC pomeni superprevodna faza, AF pa antiferomagnetna faza. Povzeto po: [8].

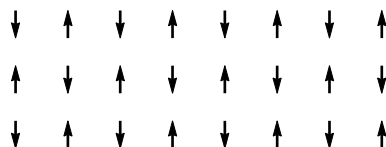
Visokotemperaturni superprevodniki so snovi, ki so superprevodne pri neobičajno visokih temperaturah. Prvi visoko temperaturni superprevodnik je bil odkrit leta 1986. Odkrila sta ga raziskovalca pri IBM K. Alex Müller in Georg Bednorz. Za odkritje sta leta 1987 prejela Nobelovo nagrado.

Medtem ko imajo običajni superprevodniki kritično temperaturo pod 30 K, visokotemperaturni dosegajo temperature do 138K. Tipični predstavniki so keramike z ravninami bakrovih in kisikovih atomov, ki jih imenujemo kuprati.

Leta 2008 so odkrili visokotemperaturne železove superprevodnike, ki dosegajo kritične temperature do 56 kelvinov. Med visokotemperaturne superprevodnike štejemo tudi nekatere spojine s fulereni.

Kuprati kažejo kvazi dvodimenzionalno obnašanje. Njihovo stanje je močno odvisno od dopiranja, kar prikazuje slika 7. Pri zelo nizkem dopiranju in dovolj nizki temperaturi, se spini elektronov na bakrih uredijo v antiferomagnetno strukturo. Shematični prikaz antiferomagnetizma prikazuje slika 8.

Superprevodna faza se tipično pojavi pri dopiranju okoli 0.1 do 0.2 in dovolj nizkih temperaturah, pri višjih temperaturah pa spojina kaže nenavadne kovinske lastnosti, kot je na primer linearna temperaturna odvisnost upornosti. Tudi spekter vzbujenih stanj ima v tem področju nenavadne lastnosti - pojavi se psevdo-reža. Dodatno dopiranje povzroči prehod v normalno kovino.



**Slika 8.** Shematični prikaz antiferomagnetizma. Puščice prikazujejo magnetne momente.

Interakcija, odgovorna za vzpostavitev parov še ni razjasnjena. Za razliko od standardnih superprevodnikov so v teh spojinah zelo močne medelektronske interakcije. Zato se pojavljajo ideje o

alternativnih mehanizmih. Ena od teorij pravi, da so ključne antiferomagnetne spinske fluktuacije dopiranega sistema (spinski valovi)[10]. Ko potuje elektron v visokotemperaturnem superprevodniku, njegov spin ustvari spinski val. Bližnji elektron to občuti kot privlačno interakcijo, podobno kot ustvari privlačno interakcijo deformacija mreže ionov v običajnih superprevodnikih.

## 6. Zaključek

Superprevodnost je še vedno zelo aktualna tema. Pojav v visokotemperaturnih superprevodnikih še ni povsem razložen, vendar primerjava kupratov z železovimi visokotemperaturnimi superprevodniki daje upanje na dokončno razrešitev tega problema. Omogoča nam vpogled v močno korelirane kvantne sisteme. Pokazala se je tudi zanimiva povezava s teorijo strun, saj je preprosta gravitacijska teorija holografsko povezana s superprevodnim stanjem[11].

Superprevodniki so že našli številne uporabe, predvsem kot magneti v MRI, magnetnih vlakih, tokamakih<sup>4</sup> in pospeševalnikih. Iz njih lahko naredimo tudi zelo natančne merilnike magnetnega polja, imenovane s angleško kratico SQUID(superconducting quantum interference device). Ti se uporabljajo na primer za brez kontaktne meritve v medicini (merimo magnetna polja, ki nastanejo pri bitju srca ali pa magnetna polja v možganih).

Še vedno čakamo na odkritje superprevodnikov, ki bi bili superprevodni pri sobni temperaturi. Ti bi lahko povzročili pravo revolucijo uporabe v industriji.

## 7. Zahvala

Za pomoč, nasvete in komentarje se zahvaljujem mentorju dr. Janezu Bonči. Zahvalil bi se tudi dr. Petru Prelovšku za koristne pripombe.

## LITERATURA

- [1] J.R. Hook and H.E. Hall. *Solid state physics*. The Manchester physics series. Wiley, 1991.
- [2] Superprevodnost. <http://users-phys.au.dk/philip/pictures/physicsfigures/node12.html> , 2014.
- [3] Fazni diagram. <http://www.supraconductivite.fr/en/index.php?p=supra-levitation-phase-more> , 2014.
- [4] N.W. Ashcroft and N.D. Mermin. *Solid State Physics*. Saunders College, Philadelphia, 1976.
- [5] Slika vdorne globine. <http://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/superconductivity/theory.php> , 2014.
- [6] F. Schwabl. *Quantum Mechanics*. Springer, 2007.
- [7] Hyperphysics. <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/solids/supcon.html> , 2014.
- [8] Wikipedija. [http://en.wikipedia.org/wiki/High\\_temperature\\_superconductors](http://en.wikipedia.org/wiki/High_temperature_superconductors), 2014.
- [9] Cooperjev problem. <http://superundergrads.wordpress.com/2011/08/28/the-cooper-problem> , 2014.
- [10] Visoko temperaturna superprevodnost. <http://www.saylor.org/site/wp-content/uploads/2011/06/High-Temperature-Superconductivity.pdf> , 2014.
- [11] Sean A. Hartnoll, Christopher P. Herzog, and Gary T. Horowitz. Building an ads/cft superconductor. 2008.
- [12] Joe Khachan and Stephen Bosi. Superconductivity. <http://www.physics.usyd.edu.au/khachan/PTF/Superconductivity.pdf> , 2014.
- [13] M.P. Marder. *Condensed matter physics*. Wiley-Interscience. John Wiley, 2000.

---

<sup>4</sup>Tokamak je naprava v obliki torusa za magnetno ujetje plazme. Uporablja se za fuzijske reaktorje.