PREPLETENOST IN NELOKALNOST V KVANTNI MEHANIKI

LARA ULČAKAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V članku je predstavljena kvantna prepletenost in z njo povezana nelokalnost. Na začetku je obrazložena kvantna prepletenost na primeru EPR paradoksa in kasneje z njo tesno povezan Bellov teorem. Tema nato preide na teorem "ni kloniranja", ki pa je potreben za razumevanje kasnejše teme - kvantne teleportacije. V sklopu kvantne teleportacije so omenjeni še najnovejši eksperimenti na tem področju.

ENTANGLEMENT AND NONLOCALITY IN QUANTUM MECHANICS

In the article quantum entanglement and quantum nonlocality are presented. At the beginning quantum entanglement is explained via EPR paradox and later Bell's theorem. Later follows expanation of "No-Cloning" theorem, which is very important for discussion of the following theme - quantum teleportation. At the end latest experiments of quantum teleportation are described.

Uvod

Kvantna prepletenost opisuje nenavadne neklasične korelacije med prostorsko ločenimi kvantnimi sistemi. Par kvantnih sistemov v prepletenem stanju lahko izrabimo za različne uporabne namene, kot na primer računske in kriptografske naloge, ki so nemogoči v klasičnem svetu. Ideja kvantne prepletenosti se je razvila leta 1935 kot miselni eksperiment Einsteina, Podolskega in Rosena, imenovan EPR paradoks, in je služila kot kritika Kopenhagenske interpretacije kvantne mehanike ([1],[2]). Izpostavili so vprašanje, ali delca, ki sta kvantno prepletena, vplivata drug na drugega v trenutku, ne glede na njuno medsebojno razdaljo. Ta fenomen je Einstein poimenoval "Spooky action at the distance". Prepričan je bil, da je narava lokalna in da ima vsak element narave v vsakem trenutku določene fizikalne lastnosti. Ker je to na videz v nasprotju s kvantnimi napovedmi, je Einstein trdil, da je kvantna mehanika nepopolna teorija. Želel je dokazati, da obstaja teorija, ki natančno opiše naravo in je kvantna mehanika le statistična posplošitev te teorije.
Kljub mnogim neodgovorjenim vprašanjem o kvantnem svetu pa je raziskovalcem uspelo uporabiti kvantno teorijo za konkretne dosežke, ki klasično ne bi bili možni, na primer kvantna teleportacija. Te teme se dotika članek na koncu, omenjeni pa so tudi najnoveši uspehi in eksperimenti iz tega področja.

Kvantna prepletenost

O kvantni prepletenosti govorimo, ko je stanje posameznega delca nekega sistema odvisno od stanj drugih delcev sistema. Ni možno zapisati valovne funkcije posameznega delca, obstaja le valovna funkcija celotnega sistema. Meritve neke fizikalne količine delca so korelirane z meritvami drugih delcev. Zaradi tega nastopijo pojavi, ki se nam zdijo paradoksalni. Tipičen primer takih pojavov je t.i. EPR paradoks.

EPR paradoks

V EPR paradoksu obravnavamo sistem dveh elektronov s spinom $s = \frac{1}{2}$. Stanje elektrona A predstavimo z razvojem po lastnih stanjih operatorja projekcije spinske vrtilne količine S_{zA}

$$|\psi\rangle_A = a\,|\uparrow\rangle_A + b\,|\downarrow\rangle_A\,, \tag{1}$$

kjer je $S_{zA}\left|\uparrow\right\rangle_A = \frac{\hbar}{2}\left|\uparrow\right\rangle_A$ in $S_{zA}\left|\downarrow\right\rangle_A = -\frac{\hbar}{2}\left|\downarrow\right\rangle_A$. Prav tako predstavimo stanje elektrona B z razvojem po lastnih stanjih operatorja S_{zB}.
Ko pa opisujemo sistem dveh elektronov, predstavimo valovno funkcijo z razvojem po bazi sistema dveh delcev

$$\left|\psi\right\rangle_{AB} = \sum_{ij} c_{ij}\left|i\right\rangle_A \otimes \left|j\right\rangle_B = \sum_{ij} c_{ij}\left|i\,j\right\rangle. \tag{2}$$

Nova baza je tenzorski produkt baz za posamezna delca. V baznem vektorju $\left|i\,j\right\rangle$ prvi simbol predstavlja orientacijo spina prvega delca, drugi simbol pa orienatcijo spina drugega.
Če se da stanje sistema zapisati kot produkt stanj za delec A in delec B, $\left|\psi\right\rangle_A \otimes \left|\psi\right\rangle_B$, pravimo, da je sistem v *produktnem stanju*. Primer produktnega stanja so kar bazni vektorji sistema delcev. Na splošno je delec v stanju, ki se ga ne da zapisati na tak način. Taka stanja imenujemo *prepletena stanja*. Primer prepletenega stanja je stanje

$$\left|\psi\right\rangle_{AB} = \sqrt{\frac{1}{2}}(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\right\rangle), \tag{3}$$

ki ga imenujemo singletno stanje.
Recimo, da imamo dva elektrona v takem stanju ujeta v škatli in ju ob $t = 0$ spustimo, da zletita v nasprotnih smereh. Opazovalca delca A poimenujemo Ana, opazovalca delca B pa Bob (tradicionalno se v angleščini imenujeta Alice in Bob). Ko Ana pomeri orientacijo spina prvega delca, dobi enega od dveh enako verjetnih rezultatov:

- Rezultat Anine meritve je 1, kar pomeni, da se sistem obeh delcev po kolapsu valovne funkcije nahaja v stanju $\left|\uparrow\downarrow\right\rangle$
- Rezultat Anine meritve je -1, kar pomeni, da se sistem obeh delcev po kolapsu valovne funkcije nahaja v stanju $\left|\downarrow\uparrow\right\rangle$

Če Ana izmeri 1, bo Bob s kasnejšo meritvijo z verjetnostjo 1 pomeril -1, če pa Ana pomeri -1, bo Bob z verjetnostjo 1 pomeril orientacijo 1. Od tod se zdi, da je Ana s svojo meritvijo vplivala na delec B, čeprav je bila njena meritev lokalna in čeprav sta delca prostorsko ločena.

Kavzalnost, lokalnost, realizem

Ta eksperiment postavi veliko vprašanj, saj na prvi pogled nasprotuje mnogim prepričanjem o svetu, kot so na primer realizem, lokalnost in kavzalnost.

- *Kavzalnost* je razmerje med vzrokom in posledico. Posledica vedno sledi vzroku s časovnim zamikom, ki je enak času, ki ga informacija potrebuje, da prepotuje razdaljo med vzrokom in posledico. Ali eksperiment krši kavzalnost, glede na to, da do spremembe delca B pride v trenutku in ne v času, ki ga potrebuje svetloba za prepotovanje razdaljo med delcema? Kršitvi kavzalnosti se v tem primeru izognemo, saj je na ta način nemogoče poslati informacijo. Rezultat Anine meritve je naključen, zato Ana ne more nadzirati, v katero stanje se bo podrla valovna funkcija in zato ne more pošiljati informacij.

- *Realizem* pomeni, da je vsaka količina ves čas dobro določena, tudi če je mi ne poznamo in je ne merimo.

- *Lokalnost* pomeni, da na dogajanje v neki točki prostora vpliva le bližnja okolica.

Kaj pa se zgodi z realizmom in lokalnostjo pri tem poskusu? Delovanje na razdaljo je zelo motilo Einsteina, Rosena in Podolskega. Zagovarjali so lokalni realizem, to je, da je izid meritve že pred

meritvijo določen, le mi ga ne poznamo. Izid meritve naj bi bil zapisan v nekih skritih parametrih delca, kasneje imenovanih *skritih spremenljivkah*. Skrite spremenljivke so lokalne, torej odvisne le od bližnje okolice in od dogodkov, ki so se zgodili v preteklosti. Pojma lokalni realizem in teorija lokalnih skritih spremenljivk sta praktično analogna. Ker pa je za tistega časa veljalo prepričanje, da opis narave v okviru kvantne mehanike, ki vključuje tudi skrite spremenljivke, ni možen (vzrok za to je bila von Neumannova napaka v dokazu teorema "ni skritih spremenljivk" iz leta 1932), je Einstein trdil, da je kvantna mehanika nepopoln opis narave. Vprašanje skritih spremenljivk je ponovno postalo aktualno leta 1964, ko je Bell z neenačbami pokazal, kako bi lahko eksperimentalno preverili, ali je narava lokalna in hkrati realistična [3].

Bellov teorem

Teorije lokalnih skritih spremenljivk

Kot je bilo omenjeno v prejšem poglavju, je EPR paradoks motil veliko prominentnih raziskovalcev. Veljalo je prepričanje, da obstaja splošnejša teorija kot kvantna mehanika in da ta teorija vsebuje lokalne skrite spremenljivke. Teorija lokalnih skritih spremenljivk bi bila zelo zaželjena, če bi se s tako teorijo izognili konceptu kolapsa valovne funkcije ob meritvi in s tem nelokalni interakciji med prepletenimi delci. Poleg tega pa se zdi taka teorija veliko bolj naravna, saj ima vsak element makroskopskega sveta vedno točno določene lastnosti. V taki teoriji ima vsak delec že od nastanka natančno določene lastnosti (recimo orientacijo spina), ki pa jih mi spoznamo šele po meritvi. Torej v primeru elektronov v singletnem stanju ima elektron A že od začetka določen spin, elektron B pa ima ravno nasprotnega in prav tako točno določenega. Ko pomerimo elektron A, spoznamo njegovo orientacijo spina, ker pa je bila že prej določena, ni prišlo do kolapsa valovne funkcije. Iz enakega razloga nismo z meritvijo vplivali na delec B.
Leta 1964 je John Steward Bell objavil članek "On the Einstein Podolsky Rosen paradox", v katerem je formalno pokazal, kako lahko eksperimentalno preverimo, ali je teorija kvantnega sveta hkrati realna in lokalna. Leta 1982 je bil teorem eksperimentalno potrjen.
Ideja dokaza teorema je bila, da predpostavka skritih spremenljivk ne velja, če dopuščamo meritve delcev v različnih smereh (recimo da delec A izmerimo pod kotom 0, delec B pa pod kotom 60°). Bell je izhajal iz trditve Einsteina, Podolskega in Rosena, da izbira kota, pod katerim merimo orientacijo spina delca A, ne vpliva na izid meritve delca B. Ko je postavil matematično formulacijo lokalnosti in realizma, je pokazal, da v določenih primerih ta predpostavka krši napovedi kvantne mehanike.
Teorem bomo obravnavali na primeru sistema dveh prepletenih elektronov s spinom $\frac{1}{2}$. Zopet opazujemo dva elektrona, ki letita v nasprotnih smereh in sta v singletnem stanju $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$. Orientacijo spina posameznega delca lahko merimo v poljubni smeri. Rezultat meritve je 1, delec je orientiran v smeri osi, ali pa -1, delec je orientiran v nasprotni smeri osi.
Bell je v dokazu primerjal korelacije orientacije spina delcev A in B, ki ju merimo v različnih smereh, z neenakostmi, ki veljajo, če velja teorija lokalnih skritih spremenljivk. Korelacije napove kvantna mehanika in če ustrezajo neenakostim, teorija lokalnih skritih spremenljivk drži.

CHSH neenakost

Prvotna Bellova neenakost se je glasila $|E(AC) - E(BA) - E(CB)| \leq 1$, kjer je $E(xy)$ korelacija med meritvami projekcije spinov dveh delcev. Kaj točno je ta korelacija, je razloženo v dokazu CHSH neenakosti. A, B in C so rezultati meritev, ki so bile narejene pod različnimi postavitvami osi $\theta_A, \theta_B, \theta_C$, pod katerimi merimo orientacijo spina.
Boljša za obravnavo pa je posplošena oblika Bellove neenakosti, ki so jo uvedli John Clauser, Michael Horne, Abner Shimony in R. A. Holt [4]. Od tod tudi njeno ime CHSH neenakost. Neenakost je

oblike

$$|E(AB) + E(A'B) + E(AB') - E(A'B')| \leq 2, \tag{4}$$

kjer pa obravnavamo korelacije meritev projekcije spinov dveh delcev pri štirih različnih postavitvah osi merjenja $\theta_A, \theta_B, \theta'_A, \theta'_B$. A in A' sta rezultata meritve delca A pod kotoma θ_A in θ'_A, B in B' pa sta rezultata meritve delca B pod kotom θ_B in θ'_B.

Formulacija lokalnega realizma

V formalnejšem dokazu CHSH neenakosti je potrebno oblikovati pojem lokalnega realizma na matematični način [5]:

1. Obstaja prostor skritih parametrov Λ. Opazovane količine, ki jih opazujeta Ana in Bob, (v primeru elektrona je to projekcija spina) so posledice nekega naključnega seta skritih parametrov λ, ki je element prostora Λ.

2. Opazovane količine so funkcije lokalne postavitve detektorja θ in seta skritih parametrov λ in ničesar drugega.

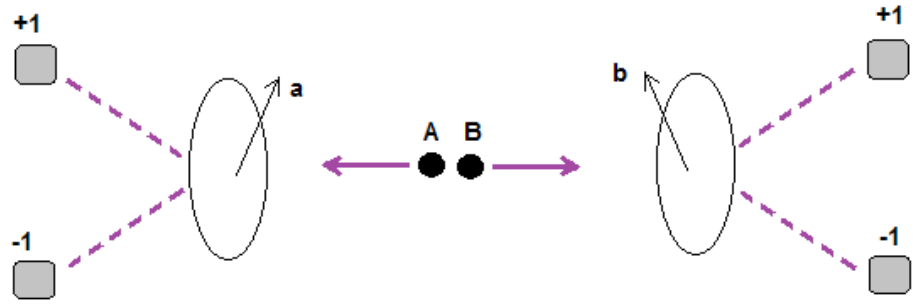
   - Opazljivka, ki jo opazuje Ana s postavitvijo detektorja θ_A je $A(\theta_A, \lambda)$.

   - Opazljivka, ki jo opazuje Bob s postavitvijo detektorja θ_B je $B(\theta_B, \lambda)$.

Prostor skritih parametrov ima porazdelitev. Pričakovana vrednost naključne spremenljivke X je potemtakem $E(X) = \int_\Lambda X(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda$, kjer je $\rho(\lambda)$ verjetnostna gostota, po kateri je porazdeljen set parameterov λ. Parametri meritve $\theta_A, \theta_B, \theta'_A, \theta'_B$ so naključno izbrani.

Dokaz CHSH neenakosti

Privzemimo lokalnost in da je izbira parametrov meritve θ_A, θ_B popolnoma naključna. θ_A je kot osi, na katero meri Ana delec A, θ_B pa kot osi, pod katerim meri Bob delec B. Meritvi posameznih delcev sta prostorsko ločeni.
A in B sta rezultata meritve. $P_{\theta A,\theta B}(A, B)$ je verjetnost, da pri parametrih θ_A, θ_B izmerimo A in B. Ker je lahko interakcija, ko sta bila delca še skupaj, prispevala k odvisnosti rezultatov meritve delcev A in B, vpeljemo set podatkov o delcih oziroma set skritih spremenljivk, imenovan λ. Delca imata enak set skritih parametrov, saj imata isti izvor. Skrite spremenljivke so določene od trenutka, ko delca nastaneta, in celotno vplivajo na odvisnost med A in B tako, da so naključne spremembe A povzročene od λ in θ_A in so neodvisne od naključnih sprememb B, povzročenih od λ in θ_B. λ je neodvisen od izbire θ_A in θ_B, saj je bil določen že pred izbiro parametrov. λ je naključen z verjetnostno gostoto $\rho(\lambda)$. Verjetnost, da pri parametrih θ_A, θ_B izmerimo A in B je $P_{\theta A,\theta B}(A, B) = \int_\Lambda P_{\theta A}(A, \lambda)P_{\theta B}(B, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda$.
Rezultat meritve orientacije spina delca glede na poljubno os je ± 1. Rezultat $+1$ pomeni, da je spin delca v smeri osi merjenja, rezultat -1 pa, da je spin delca v nasprotni smeri kot os merjenja. Možni rezultati meritev delcev A in B so
$A = \pm 1$
$B = \pm 1$
$A' = \pm 1$
$B' = \pm 1$



Slika 1. Shematski prikaz Bellovega testa. Par prepletenih delcev A in B leti v različnih smereh proti detektorjem. Detektor delca A ima os merjenja v smeri **a**, detektor delca B pa ima os v smeri **b**. Rezultat meritve posameznega delca je ± 1.

AB je produkt rezultatov meritev A in B. Ker so možne vrednosti rezultatov ± 1, je $AB = \pm 1$. Definiramo še količino

$$S = AB + A'B + AB' - A'B' \tag{5}$$

in poglejmo, kakšne vrednosti lahko zavzame (glej Tabelo 1).

Tabela 1. Dokaz CHSH neenakosti - možni rezultati.

A	A'	B	B'	S
1	1	1	1	2
-1	1	1	1	-2
-1	-1	1	1	-2
1	-1	1	-1	-2
...	...	...	...	...
-1	-1	-1	-1	-2

Vidimo, da S lahko zavzame le vrednosti ± 2.
Naredimo N meritev delcev A in B za vsako kombinacijo postavitev osi $(\theta_A\theta_B;\theta_A\theta'_B;\theta'_A\theta_B;\theta'_A\theta'_B)$ in si ob vsaki meritvi zapomnimo AB. Korelacija med meritvami A in B je povprečje AB

$$E(AB) = \frac{(AB)_1 + (AB)_2 + ... + (AB)_N}{N} = \frac{1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ... - 1}{N}. \tag{6}$$

Na enak način izračunamo še $E(A'B), E(AB')$ in $E(A'B')$ in nato $E(S)$, to je povprečna vrednost S. Ker je $S = \pm 2$, je absolutna vrednost $E(S)$ manjša ali enaka 2

$$|E(S)| = |\frac{S_1 + S_2 + ... + S_N}{N}| = |\frac{2 + 2 - 2 + 2 - 2 + ... - 2}{N}| \leq 2. \tag{7}$$

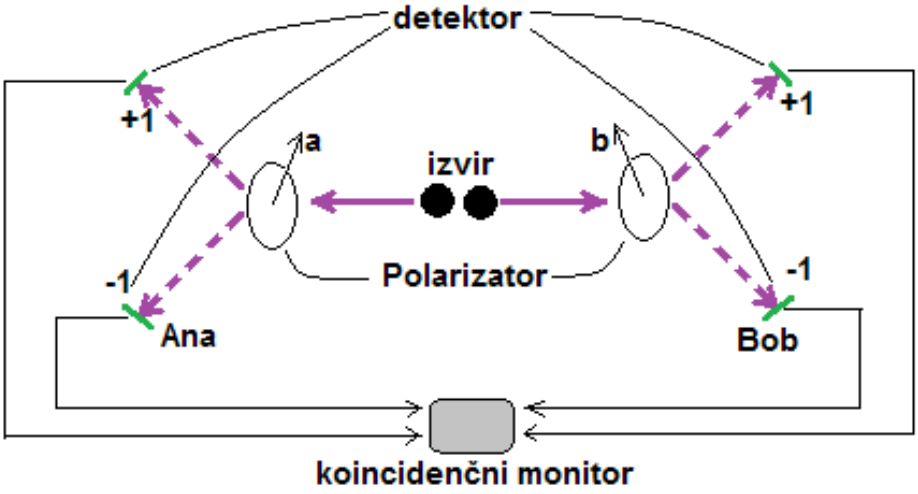
Iz $|E(S)| = |E(AB + A'B + AB' - A'B')| = |E(AB) + E(A'B) + E(AB') - E(A'B')|$ in $|E(S)| \leq 2$ sledi CHSH neenakost $|E(AB) + E(A'B) + E(AB') - E(A'B')| \leq 2$.

Kršitev CHSH neenakosti

Sedaj pa obravnavajmo CHSH neenakost pri konkretnih parametrih meritve, na primer $\theta_A = 0, \theta_B = \frac{\pi}{4}$, $\theta'_A = \frac{\pi}{2}, \theta'_B = -\frac{\pi}{4}$. Kvantna teorija napove, da za korelacijo meritev pri parametrih θ_A, θ_B velja

$$E(AB) = \langle\psi| (\mathbf{S_A} \cdot \mathbf{n_A})(\mathbf{S_B} \cdot \mathbf{n_B}) |\psi\rangle = -\cos(\theta_B - \theta_A), \tag{8}$$

kjer sta θ_A in θ_B kota, pod katerima se nahajata osi merjenja, $\mathbf{n_A}$ in $\mathbf{n_B}$ normalna vektorja v smeri osi merjenja, $\mathbf{S_A}$ in $\mathbf{S_B}$ pa operatorja spinske vrtilne količine. $|\psi\rangle$ je katera koli valovna funkcija, ki opiše sistem dveh prepletenih delcev. Take valovne funkcije so štiri in so opisane v poglavju Bellova stanja, Bellova meritev. Torej je CHSH neenakost kršena, ker je $|E(AB)+E(A'B)+E(AB')-E(A'B')| = |\cos(\theta_A-\theta_B)-\cos(\theta_A-\theta'_B)+\cos(\theta'_A-\theta_B)+\cos(\theta'_A-\theta'_B)| = 2\sqrt{2}$ Pokazali smo, da kvantne napovedi kršijo neenakost, katere osnovna predpostavka je lokalnost. Od tod sledi Bellov teorem, da ne obstaja lokalna teorija, ki bi dala prave kvantne napovedi.
Prvi eksperiment, ki je potrdil kršitev Bellove neenakosti v prid kvantne mehanike, so izvedli A. Aspect, J. Dalibard in G. Roger leta 1982 [6]. Merili so pod zgoraj naštetimi koti $\theta_A = 0, \theta_B = \frac{\pi}{4}$, $\theta'_A = \frac{\pi}{2}, \theta'_B = -\frac{\pi}{4}$ in izmerili $S_{exp} = 2,697 \pm 0,015$.



Slika 2. Shematski prikaz Bellovega testa. Iz izvira izhajajo pari fotonov, ki letijo v nasprotne smeri. Vsak foton prileti do polarizatorja, njegovo orientacijo θ_A, θ_B pa postavi raziskovalec. Signali iz vsakega kanala so detektirani, koincidence tipov $++$, $--$, $+-$, $-+$ pa šteje koincidenčni monitor.

Kombinacija realizma in lokalnosti

Zelo popularno je prepričanje, da kombinacija realizma in lokalnosti nasprotuje kvantnim napovedim, torej če izključimo realizem, lokalnost še vedno velja (in obratno). To prepričanje je napačno. Bell je formuliral lokalnost na podlagi elementov fizikalne realnosti, oziroma na setu podatkov o delcu λ; če torej zavržemo realizem, so nadaljna sklepanja o lokalnosti nesmiselna. Primer, da lokalnosti ne moremo obravnavati brez sklicevanja na elemente fizikalne realnosti gre tako:
Če umre poročen moški, bo njegova žena v trenutku postala vdova. Seveda nihče ne obravnava tega kot nelokalni dogodek. Če pa smrt moža v trenutku povzroči povišanje telesne temperature žene, pa se to obravnava kot kršitev lokalnosti. Razlika med tema primeroma je ta, da stanje 'vdova' ni povezan z elementi fizikalne realnosti v okolici žene, medtem ko pa telesna temperatura je. Telesna temperatura je funkcija elementov fizikalne realnosti v okolici žene.

Teorem "ni kloniranja"

Teorem "ni kloniranja" (v angleščini imenovan "no-cloning" theorem) izključuje možnost ustvarjanja identičnih kopij neznanega kvantnega stanja. Z drugimi besedami, nemogoče je kopirati kvantno informacijo [7].
Implicira ga že dejstvo, da prek EPR eksperimenta ni možno poslati informacije. Recimo, da ima Ana pri sebi elektron A in želi poslati bit informacije Bobu, ki ima elektron B. Dogovorita se, da če

Ana sporoči digitalno informacijo "1", bo pomerila orientacijo spina elektrona A v z-smeri in tako spravila delec B v stanje $|\uparrow\rangle$ ali $|\downarrow\rangle$, če pa sporoči informacijo '0', pa ga ne pomeri in je delec B še vedno z enako verjetnostjo v obeh stanjih. Če bi Bob lahko kloniral stanje delca B, bi naredil veliko njegovih kopij in meritev. Če je rezultat meritve vedno enak, Bob ve, da Ana sporoča '1'. Če pa so rezultati $|\uparrow\rangle$ in $|\downarrow\rangle$, pa ve, da Ana sporoča '0'. Vendar ta način komunikacije ni mogoč, ker krši kavzalnost.

Dokaz teorema "ni kloniranja"

Recimo, da imamo v laboratoriju elektron A v neznanem stanju $|\psi\rangle_A$. Vprašanje je, ali je možno zgraditi tako napravo, ki lahko iz vsakega stanja $|\psi\rangle_A$ naredi dve kopiji tega stanja, torej stanje $|\psi\rangle_A |\psi\rangle_A$. Naj imamo v laboratoriju še elektron B, ki je v začetnem oziroma praznem stanju $|e\rangle_B$. To stanje je neodvisno od stanja $|\psi\rangle_A$. Celotni sistem obeh delcev opišemo s stanjem $|\psi\rangle_A |e\rangle_B$.
Na sistem lahko delujemo na dva načina. Stanje lahko izmerimo, kar pa se konča s podrto valovno funkcijo. Lahko pa vplivamo na Hamiltonian tako, da bo časovni razvoj stanja $|\psi\rangle_A |e\rangle_B$ dal stanje $|\psi\rangle_A |\psi\rangle_B$. Naj bo $\hat{U}$ unitarni operator časovnega razvoja $\hat{U}(t) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$, v tem primeru pa nastopa kot operator, ki stanje $|\psi\rangle_A |e\rangle_B$ pretransformira v kopijo $|\psi\rangle_A |\psi\rangle_B$

$$\hat{U} |\psi\rangle |e\rangle_B = |\psi\rangle_A |\psi\rangle_B . \tag{9}$$

Če je možno prekopirati eno poljubno stanje $|\psi\rangle_A$ delca A, mora biti možno prekopirati tudi katerokoli drugo poljubno stanje $|\phi\rangle_A$ delca A

$$\hat{U} |\phi\rangle_A |e\rangle_B = |\phi\rangle_A |\phi\rangle_B . \tag{10}$$

Ker je $\hat{U}$ unitaren, velja $\langle\phi|\,\psi\,\rangle = \langle e|_B \langle\phi|_A |\psi\rangle_A |e\rangle_B = \langle e|_B \langle\phi|_A \hat{U}^\dagger \hat{U} |\psi\rangle_A |e\rangle_B = \langle\phi|_B \langle\phi|_A |\psi\rangle_A |\psi\rangle_B = \langle\phi|\,\psi\,\rangle^2$.
Torej velja

$$\langle\phi|\,\psi\,\rangle = \langle\phi|\,\psi\rangle^{\,2}. \tag{11}$$

To pa velja le v primeru, ko je $|\phi\rangle = |\psi\rangle$, saj je takrat $\langle\phi|\,\psi\,\rangle = 1$, ali pa sta stanji ortogonalni in je $\langle\phi|\,\psi\,\rangle = 0$.
Če torej lahko kopiramo stanje $|\psi\rangle$, lahko kopiramo le tista stanja, ki so mu enaka ali pa nanj ortogonalna.
Kot primer takih stanj sta stanji $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ in $|\phi\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$.
Ker pa to ne velja za splošna stanja, je nemogoče kopirati splošno stanje.

Omejitve teorema

Teorem "ni kloniranja" velja le za unitarne operatorje kopiranja in čista stanja, to so stanja, ki se jih da natančno predstaviti z valovno funkcijo. Obstaja pa splošnejša oblika teorema, imenovana teorem "ni oddajanja" (v angleščini imenovan no-broadcast theorem), ki prepoveduje kopiranje v bolj splošnem primeru.

Klasični teorem "ni kloniranja"

Dejstvo, da se kvantne informacije ne da klonirati, je na prvi pogled zopet eden od eksotičnih primerov iz kvantnega sveta. Velja namreč prepričanje, da se v klasičnem svetu informacijo da klonirati. Vendar temu ni tako - obstaja namreč klasična različica teorema 'ni kloniranja', ki kaže, da ni mogoče prekopirati verjetnostne porazdelitve nekega sistema na drug sistem, ne da bi zmotili originalno porazdelitev [8].

Kvantna teleportacija

Možna uporaba kvantne prepletenosti je kvantna teleportacija. To je proces, pri katerem se kvantna informacija (to je točno stanje elektrona) prenese iz ene lokacije na drugo. Pri tem načinu teleportiranja je stanje originalnega delca uničeno, na neki drugi lokaciji pa preide drug delec v stanje originalnega delca. Za teleportacijo potrebujemo kvantno stanje, ki ga pošiljamo, par prepletenih delcev in klasično komunikacijo, recimo telefon [9]. Ker je teleportacija odvisna od klasične komunikacije, to ni transport s hitrostjo, ki je večja od svetlobne hitrosti. Prav tako ne moremo delati kopij sistema, saj to krši teorem "ni kloniranja".

Bellova stanja, Bellova meritev

Pred nadaljno obravnavo kvantne teleportacije pokažimo, kaj so Bellova stanja in Bellova meritev. Bellova stanja so maksimalno prepletena stanja sistema dveh delcev [10]. Obravnavali smo jih že pri EPR paradoksu: če pomerimo en delec, se bo drugi delec podrl v nasprotno stanje. Bellova stanja na primeru dveh elektronov so naslednja:

$$|\psi\rangle_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}(|\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle), \tag{12}$$

$$|\psi\rangle_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}(|\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle), \tag{13}$$

$$|\psi\rangle_3 = \sqrt{\frac{1}{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle), \tag{14}$$

$$|\psi\rangle_4 = \sqrt{\frac{1}{2}}(|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle). \tag{15}$$

Bellova meritev je meritev dveh delcev hkrati in nam pove, v katerem od štirih Bellovih stanj se nahaja sistem delcev. Če delca že pred meritvijo nista bila v Bellovem stanju, se po taki meritvi nahajata v enem od Bellovih stanj. Ker iz dveh neprepletenih delcev dobimo po meritvi prepletena delca, pravimo, da je Bellova meritev operacija prepletanja.

Postopek kvantne teleportacije

Postopek kvantne teleportacije je sestavljen iz štirih korakov in ga bomo dokazali v nadaljevanju.

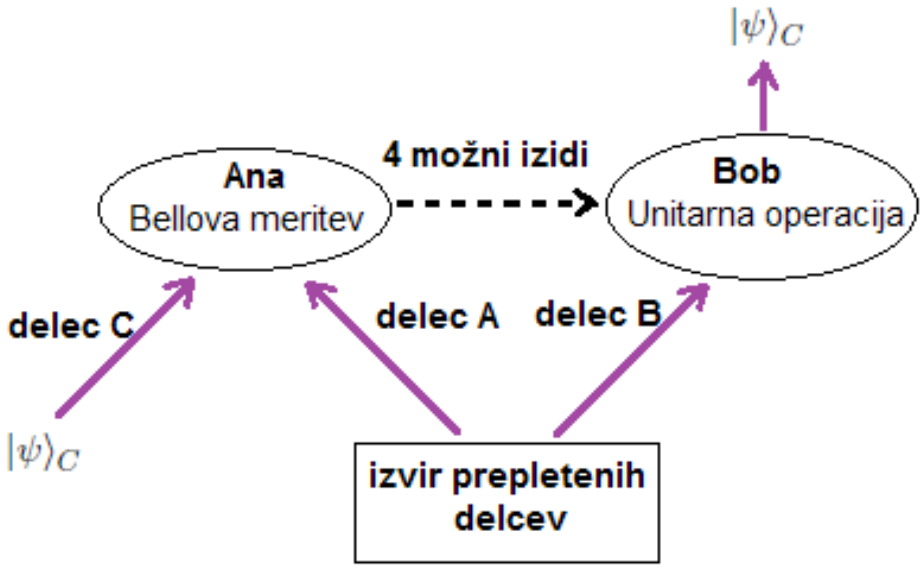
1. Potrebna sta prepletena delca A in B, v našem primeru elektrona, v enem od Bellovih stanj. Bob hrani delec B na lokaciji B, Ana pa poleg prepletenega delca A hrani še delec C v stanju $|\psi\rangle_C = a\,|\uparrow\rangle_C + b\,|\downarrow\rangle_C$ na lokaciji A. Delec C je tisti, ki ga želi Ana teleportirati.

2. Ana izvede Bellovo meritev na prepletenem delcu A in delcu C. Zaradi meritve padeta delca A in C v eno od štirih prepletenih Bellovih stanj, hkrati pa postane delec B neprepleten. Ana s to meritvijo spremeni stanje delca B. Po koncu Bellove meritve lahko Ana delca A in C zavrže.

3. Ana nato preko telefona sporoči Bobu, v katerem Bellovem stanju sta se znašla delca A in C po meritvi.

4. Zaradi Anine meritve se delec B znajde v enem od štirih možnih stanj. Eno od teh stanj je enako originalnemu stanju $|\psi\rangle$, druga tri stanja pa so mu zelo podobna. V katerem od teh stanj je delec B, Bob sklepa iz Anine informacije. Nato Bob deluje na delec B tako, da se na koncu delec B nahaja v stanju $|\psi\rangle$, to je v stanju, ki smo ga želeti teleportirati.

Vredno je pripomniti, da pri tem procesu ni prišlo ko kopiranja informacije. Delec B je na koncu v stanju $|\psi\rangle_B = a\,|\uparrow\rangle_B + b\,|\downarrow\rangle_B$, Anin delec C pa postane del prepletenega stanja. Na ta način torej nismo kopirali stanja $|\psi\rangle_C = a\,|\uparrow\rangle_C + b\,|\downarrow\rangle_C$, kar je v skladu s teoremom 'ni kloniranja'. Prav tako ni prišlo do prenosa energije ali snovi. Anin delec ni bil fizično prenešen k Bobu, temveč je bilo le njegovo stanje. To se zelo razlikuje od popularne predstave o teleportaciji.



Slika 3. Shematični prikaz kvantne teleportacije.

Formalizem

Formalizem kvantne teleportacije je naslednji:
Delec, ki ga Ana želi poslati Bobu, je v stanju

$$|\psi\rangle_C = a\,|\uparrow\rangle_C + b\,|\downarrow\rangle_C\,. \tag{16}$$

Delca A in B sta v enem od Bellovih stanj, ki ga Ana in Bob poznata.

$$|\psi\rangle_{1AB} = \sqrt{\frac{1}{2}}(|\downarrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B - |\uparrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B), \tag{17}$$

$$|\psi\rangle_{2AB} = \sqrt{\frac{1}{2}}(|\downarrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B + |\uparrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B), \tag{18}$$

$$|\psi\rangle_{3AB} = \sqrt{\frac{1}{2}}(|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B), \tag{19}$$

$$|\psi\rangle_{4AB} = \sqrt{\frac{1}{2}}(|\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B - |\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B). \tag{20}$$

Recimo, da je sistem delcev v stanju $|\psi\rangle_{4AB}$. Ana ima delca A in C, Bob pa delec B. Celotna valovna funkcija za vse tri delce je

$$|\psi\rangle_{4AB} \otimes |\psi\rangle_C = \sqrt{\frac{1}{2}}(|\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B - |\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B) \otimes (a\,|\uparrow\rangle_C + b\,|\downarrow\rangle_C). \tag{21}$$

Nato Ana naredi Bellovo meritev na delca A in C. Da bomo rezultat meritve lažje razbrali, bomo zapisali stanje Aninih delcev v bazi Bellovih stanj.

$$|\psi\rangle_{4AB} \otimes |\psi\rangle_C = \tfrac{1}{2}[|\psi\rangle_{4AC} \otimes (a\,|\uparrow\rangle_B + b\,|\downarrow\rangle_B) + |\psi\rangle_{3AC} \otimes (b\,|\downarrow\rangle_B - a\,|\uparrow\rangle_B) +$$

$$+ |\psi\rangle_{1AC} \otimes (a\,|\downarrow\rangle_B + b\,|\uparrow\rangle_B) + |\psi\rangle_{2AC} \otimes (a\,|\downarrow\rangle_B - b\,|\uparrow\rangle_B)]. \quad (22)$$

To je bila samo zamenjava baze za Anina delca, delci so še vsi v enakih stanjih kot prej. Teleportacija se zgodi, ko Ana naredi Bellovo meritev na delca A in C. Takrat se valovna fukcija z enako verjetnostjo poruši v eno od Bellovih stanj. Možni rezultati meritve so:
$|\psi\rangle_{4AC} \otimes (a\,|\uparrow\rangle_B + b\,|\downarrow\rangle_B)$,

$|\psi\rangle_{3AC} \otimes (b\,|\downarrow\rangle_B - a\,|\uparrow\rangle_B)$,

$|\psi\rangle_{1AC} \otimes (a\,|\downarrow\rangle_B + b\,|\uparrow\rangle_B)$,

$|\psi\rangle_{2AC} \otimes (a\,|\downarrow\rangle_B - b\,|\uparrow\rangle_B)$.

Delca A in C sta sedaj prepletena v enem od Bellovih stanj, delec B pa samostojen v stanju, ki zelo spominja na stanje, ki ga želimo teleportirati. Stanje, ki ga želimo teleportirati, dobimo iz katerega koli od teh stanj preko unitarne transformacije. Rezultat Bellove meritve Ani poleg stanja delcev A in C pove tudi stanje delca B. To informacijo Ana sporoči Bobu preko klasične komunikacije. Ko Bob izve, v katerem stanju je delec B, deluje nanj z unitarno operacijo tako, da dobi željeno stanje $|\psi\rangle_B = a\,|\downarrow\rangle_B + b\,|\uparrow\rangle_B$

- Če je bil Anin rezultat $|\psi\rangle_{4AC}$, Bob ve, da je delec B že v željenem stanju in ne naredi ničesar.
- Če je Anin rezultat $|\psi\rangle_{3AC}$, Bob deluje na delec B s Paulijevo spin matriko $\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ in dobil željeno stanje. To je enako, kot če delec zasukamo za 90 ° okrog z-osi.
- Če je rezultat Anine meritve $|\psi\rangle_{1AC}$, Bob zasuka delec B za 90 ° okrog x-osi, oziroma deluje na delec z operatorjem $\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
- Če pa je Anin rezultat $|\psi\rangle_{2AC}$, Bob zasuka delec B za 90 ° okrog y-osi oziroma deluje nanj z operatorjem $i\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Teleportacija je dosežena.

Eksperimentalni poskusi teleportacije

Čeprav ime izhaja iz teleportacije v fikciji, je fikcija še daleč pred današnjo tehnologijo. Teleportirali so že posamezne atome, teleportacije večjih objektov pa še niso dosegli.
Pri teleportaciji atoma so do sedaj teleportirali le elektronsko stanje, stanja jedra pa še ne. Pomembnost teleportacije jedra še ni točno znana, saj jedro le šibko vpliva na celotno stanje atoma preko hiperfinega razcepa.
Leta 1998 so eksperimentalno potrdili kvantno teleportacijo, razdaljo teleportacije pa so leta 2004 povečali na 600m. Leta 2012 je bil podrt rekord, stanje fotona so teleportirali na razdalji 143km med dvema Kanarskima otokoma La Palma in Tenerife. Rekordna razdalja teleportacije stanj delcev z maso pa je 21m.
Poleg razdalje teleportacije je pomembna tudi kompleksnost prenešenega stanja. Leta 2011 so teleportirali valovni paket s pasovno širino 10MHz.
Eden večjih uspehov je teleportacija stanja atomskega oblaka plina [11]. To so dosegli raziskovalci

inštituta Niels Bohr leta 2012. Uspelo jim je poslati informacijo med atomskimi oblaki plina, kar je velik uspeh, saj so teleportirali stanje makroskopsko velikega nabora atomov. Pri eksperimentu so uporabili oblake cezijevih atomov, ki so jih hranili v dveh steklenih posodah A in B. Posodi sta se nahajali v močnem magnetnem polju in nista bili povezani. Teleportirano kvantno stanje je bilo stanje sistema cezijevih atomov, posamezno stanje atoma pa je določala orientacija spina valenčnega elektrona. Pri poskusu so teleportirali stanje posode B v posodo A. Z lasersko svetlobo so posvetili na posodo A in s tem povzročili prepletenost med plinom in svetlobo, ki jo je izseval plin po tem, ko ga je zadela laserska svetloba. Ta svetloba, prenašalka kvantne informacije, je nato vpadala na posodo B, detektor pa je meril kvantno informacijo. Detektor je to informacijo nato poslal posodi A. Elektrone cezijevih atomov posode A so nato reorientirali v skladu z dobljeno informacijo detektorja in tako tudi končali teleportacijo.
Problem eksperimenta je bil, da se je izvajal na sobni temperaturi. Delci so imeli zato visoko kinetično energijo in so zaradi trkov ob steno izgubljali kvantno informacijo. Temu so se delno izognili tako, da so notranjosti posod A in B premazali s parafinom. Razdalja teleportacije je bila le 0.5m, za kar pa vodilni raziskovalec Polzik trdi, da je posledica majhnega laboratorija. Po njegovih besedah bi lahko pri pravi opremi poslali tako informacijo na satelit.

Zaključek

V članku sem predstavila enega zanimivejših kvatnih pojavov, kvantno prepletenost. Pri obravnavi kvantne prepletenosti naletimo na paradoks, imenovan "Spooky action at a distance". Da bi se izognili paradoksu, se nekateri zatečejo k teorijam lokalnih skritih spremenljivk, ki trdijo, da so vsi procesi v naravi lokalni in da ima vsak element narave v vsakem trenutku točno določene lastnosti. Vendar take teorije prepoveduje Bellov teorem, ki pravi, da narave ne moremo opisati lokalno in realistično. Zato si zastavljamo najbolj osnovna vprašanja o našem svetu - ali je realnost sploh lokalna? - ali imajo objekti kvantnega sveta sploh določene opazljivke? Odgovorov na to še vedno ne poznamo in niti ne vemo, če je poznanje tega sploh v dosegu naših sposobnosti.
Kvantno prepletenost lahko izrabljamo za kvantno teleportacijo, kjer smo dosegli še veliko uspehov. Največji dosežek na tem področju bi bil, če bi bili sposobni teleportirati makroskopska telesa, česar teorija ne preprečuje. Na tehničnem področju nam je že uspelo teleportirati makroskopski ansambel delcev, vendar pa se je teleportiralo le stanje elektronskega oblaka, ne pa jedra. Preden nam bo uspelo teleportirati živa bitja, bomo morali znati teleportirati tudi stanja atomskih jeder.

LITERATURA

[1] A.Einstein, B.Podolsky, N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Phys. Rev. **47** (1935), 777.

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/EPR_paradox (15.3.2014).

[3] J. S. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*, Physics **1** (3) (1964), 195-200.

[4] J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony, R.A. Holt, *Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories*, Phys. Rev.Lett. **23** (15) (1969), 880.

[5] S. Goldstein, *Bell's Theorem*, Scholarpedia **6** (10) (2011), 8378.

[6] A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, *Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analysers*, Phys. Rev. Lett. **49** (25) (1982), 1804.

[7] W. Wootters, W. Zurek, *A Single Quantum Cannot be Cloned*, Nature **229** (1982), 802-803.

[8] A. Daffertshofer, A. R. Plastino, A. Plastino, *Classical No-Cloning Theorem*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002), 210601.

[9] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, *Teleporting an Unknown Quantum State Via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels*, Phys. Rev. Lett. **70** (1993), 1895.

[10] http://en.wikipedia.org/wiki/Bell_measurement (15.3.2014).

[11] H. Krauter, D. Salart, C. A. Muschik, J. M. Petersen, Heng Shen, T. Fernholz, E. S. Polzik, *Deterministic Quantum Teleportation Between Distant Atomic Objects*, Nature Physics **9** (2013), 400-404.