IZREKI O KOMPAKTNOSTI

NEŽA ŽAGER KORENJAK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Predstavimo izrek N. Feldmana in J. Dydaka, ki vsaki zaprti unitalni podalgebri zveznih omejenih funkcij na topološkem prostoru priredi kompakten Hausdorffov prostor, ki zadošča določenim lastnostim glede na dano podalgebro. Kot posledice izpeljemo nekaj znanih izrekov splošne topologije: Stone-Weierstrassov izrek, Stone-Čechovo kompaktifikacijo, Tietzejev razširitveni izrek in izrek Tihonova.

THEOREMS ON COMPACTNESS

We prove a theorem of N. Feldman and J. Dydak, which associates to every closed unital subalgebra of bounded functions on a topological space a compact Hausdorff space satisfying certain properties with regards to the subalgebra in question. We derive as corollaries a number of well-known point-set topology results, namely the Stone-Weierstrass theorem, Stone-Čech compactification, Tietze extention theorem, and Tychonoff theorem.

Uvod

V prvem poglavju bomo podali nekatere osnovne topološke definicije in trditve. V prvem delu drugega poglavja bomo povedali in dokazali glavni izrek, kjer bomo sledili članku [1]. V drugem delu bomo predstavili alternativno formulacijo tega izreka. Vodile nas bodo ideje iz [2, poglavje 3.5]. V tretjem poglavju bomo kot posledice izpeljali izrek Tihonova (pri ukvarjanju z lastnostmi produkta topoloških prostorov privzemamo poznavanje [3, poglavje 3.1]), Stone-Čechovo kompaktifikacijo, Stone-Weierstrassov izrek in Tietzejev razširitveni izrek, ogledali pa si bomo tudi enotočkovno kompaktifikacijo ter podali še eno konstrukcijo Stone-Čechove kompaktifikacije, ki ne sledi iz izreka iz drugega poglavja. Pri prvem sledimo [2, trditev 3.5.11], pri drugem se bomo obrnili na [4, poglavje 38].

Za pomoč in usmerjanje bi se rada zahvalila svojemu mentorju doc. dr. Žigi Virku.

1. Nekatere definicije in trditve

Privzemali bomo poznavanje osnovnih definicij in trditev, ki jih je moč najti v [3, 1. in 2. poglavje].

Definicija 1. Topološki prostor X je *popolnoma regularen*, če za vsako neprazno zaprto podmnožico $B \subseteq X$ in vsako točko $a \in X \setminus B$ obstaja zvezna funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$, za katero velja $f(a) = 0$ in $f(B) = \{1\}$. Če je topološki prostor popolnoma regularen in ima lastnost T_0, je *prostor Tihonova.*

Hitro vidimo, da ima vsak popolnoma regularen topološki prostor X tudi lastnost T_3. Če sta B zaprta podmnožica popolnoma regularnega prostora X in a neka točka, ki ne leži v B, obstaja zvezna funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$, da je $f(B)) = 1$ in $f(a) = 0$. Tedaj sta $f^{-1}(\frac{2}{3}, 2)$ in $f^{-1}(-1, \frac{1}{3})$ disjunktni odprti okolici množice B in točke a.

Lema 1 (Urysohnova lema). *Naj bo X normalen topološki prostor. Naj bosta A in B zaprta disjunktna podprostora X. Potem obstaja zvezna funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$, za katero velja $f(A) = 0$ in $f(B) = 1$.*

Dokaz. Dokaz lahko bralec najde v [3, Lema 4.6.].

Trditev 2. *Vsak normalen topološki prostor je tudi prostor Tihonova.*

Dokaz. Vsak normalen topološki prostor je tudi Hausdorffov, zato so singeltoni zaprte množice. Po Urysohnovi lemi tedaj za vsako zaprto podmnožico $Z \subseteq X$ in točko $x \in X \setminus Z$ obstaja $f \in \mathcal{C}(X)$, za katero velja $f(x) = 0$ in $f(Z) = 1$, torej X ustreza definiciji prostora Tihonova.

Trditev 3. *Topološki prostor X je prostor Tihonova natanko tedaj, ko je Hausdorffov in družina $\{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) | f \in \mathcal{C}(X)\}$ tvori bazo prostora X.*

Dokaz. Naj bo X prostor Tihonova in naj bo $U \subseteq X$ odprta množica v X. Za vsako točko $x \in U$ obstaja zvezna funkcija f_x, za katero velja $f_x(x) = 1$ in $f_x(X \setminus U) = 0$. Potem je $\cap_{x \in U} f^{-1}(0) = X \setminus U$. Torej je $U = \cup_{x \in X} f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Ker ima popolnoma regularen prostor tudi lastnost T_3, je prostor Tihonova tudi regularen in zato Hausdorffov.

Naj bo sedaj družina $\{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) | f \in \mathcal{C}(X)\}$ baza nekega Hausdorffovega prostora X. Pokazati želimo, da je ta prostor tudi popolnoma regularen. Naj bo $Z \subseteq X$ zaprta množica v X. Potem je $X \setminus Z$ odprta množica in kot takšna unija baznih množic: $X \setminus Z = \cup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ za neko indeksno množico Λ, $f_\lambda \in \mathcal{C}(X)$, in $Z = \cap_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda^{-1}(0)$. Za vsak $y \in X \setminus Z$ torej obstaja $f_{\lambda_y}, \lambda_y \in \Lambda$, da $f_{\lambda_y}(y) \neq 0$. Funkcija s predpisom $q(x) = \frac{1}{f_{\lambda_y}(y)} f_{\lambda_y}(x)$ je tedaj enaka 0 na Z, v točki y pa zavzame vrednost 1.

V veliki meri se bomo ukvarjali z algebro zveznih omejenih funkcij na danem topološkem prostoru. Naj bo X topološki prostor in

$$\mathcal{C}^*(X) = \{f \in \mathcal{C}(X) | |f(x)| \leq M \text{ za neki } M \in \mathbb{R} \text{ in vsak } x \in X\}$$

množica zveznih omejenih funkcij na X. Operacije definiramo po točkah in uvedemo na množico supremum normo $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|\,;\, x \in X\}$, ki je dobro definirana, saj je funkcija f omejena. Ta norma porodi metriko d, $d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$, s katero $\mathcal{C}^*(X)$ postane poln metrični prostor. Metrika podaja topologijo, ki ji pravimo *topologija enakomerne konvergence.* Tako opremljena množica $\mathcal{C}^*(X)$ je unitalna topološka algebra nad $\mathbb{R}$.

Velja $\{f^{-1}(0) | f \in \mathcal{C}(X)\} = \{f^{-1}(0) | f \in \mathcal{C}^*(X)\}$ – za $f \in \mathcal{C}(X)$ namreč velja $f^{-1}(0) = (\arctan \circ f)^{-1}(0)$, funkcija $\arctan \circ f$ pa je v $\mathcal{C}^*(X)$. Seveda pa je tudi $\mathcal{C}^*(X) \subseteq \mathcal{C}(X)$. Zato lahko v trditvi 3 algebro $\mathcal{C}(X)$ nadomestimo z $\mathcal{C}^*(X)$.

2. Glavni izrek

Naj bo X topološki prostor. Razmišljajmo o vseh preslikavah iz X v kompaktne Hausdorffove prostore. Naj bo Y kompakten Hausdorffov prostor, in naj bo $f \colon X \to Y$ preslikava. Prostor $\mathrm{Cl}(f(X)) \subseteq Y$ je zaprt podprostor kompaktnega Hausdorffovega prostora in je zato tudi sam kompakten in Hausdorffov, torej se lahko pri opazovanju preslikav v kompaktne Hausdorffove prostore brez škode za splošnost omejimo na takšne preslikave f in prostore Y, za katere velja $\mathrm{Cl}(f(X)) = Y$. Takšnim parom (Y, f) pravimo *kompaktne Hausdorffove razširitve prostora* X[1].

Preslikava f inducira preslikavo f^* iz algebre $\mathcal{C}^*(Y)$ v algebro $\mathcal{C}^*(X)$ s predpisom $f^*(g) = g \circ f$. Označimo sliko funkcije f^* s P_f. Množica P_f je zaprta podalgebra topološke algebre $\mathcal{C}^*(X)$ in preslikava $f^* \colon \mathcal{C}^*(Y) \to P_f$ je izometrija.

Vsaka kompaktna Hausdorffova razširitev (Y, f) prostora X torej določa zaprto podalgebro P_f prostora $\mathcal{C}^*(X)$, ki je izomorfna $\mathcal{C}^*(Y)$. Sledeči izrek nam pove, da lahko naredimo tudi obratno konstrukcijo, torej, da se vse informacije o kompaktnih Hausdorffovih razširitvah danega prostora X skrivajo že v algebri $\mathcal{C}^*(X)$. Pokazali bomo, da vsaka zaprta podalgebra $P \subseteq \mathcal{C}^*(X)$ določa kompaktno Hausdorffovo razširitev $(\mathcal{M}(P), i_P)$.

Izrek 4. *Naj bo $P \subseteq C^*(X)$ zaprta podalgebra zveznih omejenih funkcij na topološkem prostoru X, ki vsebuje vse konstantne funkcije. Tedaj obstaja kompaktna Hausdorffova razširitev $(\mathcal{M}(P), i_P)$ prostora X, za katero je funkcija $i_P^* \colon C^*(\mathcal{M}(P)) \to C^*(X)$, definirana s predpisom $i_P^*(g) := g \circ i_P$, injektivna in $\mathrm{Im}(i_P^*) = P$. Ta kompaktna Hausdorffova razširitev $(\mathcal{M}(P), i_P)$ je enolična v smislu, da za vsako drugo kompaktno Hausdorffovo razširitev (Y, f), za katero velja $P = P_f$, obstaja natanko en homeomorfizem $h \colon Y \to \mathcal{M}(P)$, da velja $h \circ f = i_P$.*

Če je $f \colon X \to Y$ preslikava in Q takšna zaprta podalgebra $Q \subseteq \mathcal{C}^*(Y)$, da je kompozitum $g \circ f$ element P za vsak $g \in Q$, potem obstaja enolično določena preslikava f_*, da komutira diagram

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_P"] & Y \arrow[d, "i_Q"] \\
\mathcal{M}(P) \arrow[r, "f_*"] & \mathcal{M}(Q).
\end{tikzcd}$$

[1] Pod pojmom razširitev pogosto razumemo, da prostore večamo; v tej definiciji v splošnem to ni res.

Naslednjih 9 lem nas vodi do dokaza tega izreka. V prvem delu razdelka dokažemo obstoj prostora $\mathcal{M}(P)$, ter preverimo, da je kompakten. Ta del dokaza je konstrukcijski; na množico vseh maksimalnih podalgeber v P uvedemo topologijo in zanjo preverimo želene lastnosti.

V drugem delu definiramo funkcijo f_*, dokažemo njeno enoličnost, in preverimo komutativnost zgornjega diagrama. Pokažemo tudi, da je prostor $\mathcal{M}(P)$ Hausdorffov.

Naj bo P podalgebra algebre $\mathcal{C}^*(X)$. Označimo z $\mathcal{M}(P)$ množico vseh maksimalnih podalgeber τ algebre P glede na lastnost:

$$\{\alpha \in \tau | \alpha^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon) \neq \emptyset \ \forall \varepsilon > 0\}. \tag{1}$$

Vse funkcije v τ imajo torej vrednosti poljubno blizu 0.

Lema 5. *Naj bo P podalgebra $\mathcal{C}^*(X)$ in $a \in X$. Tedaj je $\tau_a := \{f \in P | f(a) = 0\} \in \mathcal{M}(P)$.*

Dokaz. Očitno τ_a ustreza lastnosti (1) in je zato vsebovana v neki maksimalni podalgebri τ. Denimo, da $\alpha \notin \tau_a$, tj. $\alpha(a) \neq 0$. Potem je $\beta(x) := \alpha(x) - \alpha(a) \in \tau_a$. Denimo, da je $\tau_a \subsetneq \tau \in \mathcal{M}(P)$, in $\alpha \in \tau - \tau_a$. Oglejmo si funkcijo $\beta^2 + \alpha^2$. Ker sta po predpostavki $\alpha, \beta \in \tau \in \mathcal{M}(P)$, je tudi $\alpha^2 + \beta^2 \in \tau$. Sedaj bomo prišli do protislovja; funkcija $\alpha^2 + \beta^2$ namreč ne zadošča (1). Dokažimo neenakost,

$$\alpha^2(x) + \beta^2(x) \geq \frac{\alpha(a)^2}{4} > 0,$$

oziroma ekvivalentno

$$2\alpha(x)^2 - 2\alpha(x)\alpha(a) + \frac{3\alpha(a)^2}{4} > 0$$

To je kvadratna enačba v $\alpha(x)$; njene ničle so $\alpha(x)_{1,2} = \frac{2\alpha(a) \pm \sqrt{-2\alpha(a)^2}}{4}$, kar ni realno število, saj $\alpha(a)^2 > 0$. Funkcija $\alpha^2 + \beta^2 - \frac{\alpha(a)^2}{4}$ torej nima ničel, v točki a pa zavzame pozitivno vrednost, torej je pozitivna za vsak x. Funkcija $\alpha^2 + \beta^2 \in \tau$ torej ne zadošča lastnosti (1), torej τ ne more biti element $\mathcal{M}(P)$.

Lema 6. *Če je X kompakten topološki prostor, je $\mathcal{M}(P) = \{\tau_x | x \in X\}$.*

Dokaz. Naj bo $\tau \in \mathcal{M}(P)$. Za vsak končen nabor funkcij $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \tau$ je tudi $f_1^2 + f_2^2 + ... + f_k^2 \in \tau$. Ker je X kompakten, ta vsota na X zavzame svoj minimum, ki mora biti 0, saj τ ustreza (1). Zato obstaja $x \in X$, da je $f_1^2(x) + \cdots + f_k^2(x) = 0$, kar pomeni, da je $f_i(x) = 0$ za $i = 1, 2, ..., k$, torej ima vsak končen nabor funkcij iz τ skupno ničlo.

Denimo, da to ne velja za vse funkcije v τ, torej da je $\cap_{f\in\tau} f^{-1}(0) = \emptyset$. Potem je $\cup_{f\in\tau}(f^{-1}(0))^c = X$. Ker so f zvezne, je $f^{-1}(0)$ zaprta množica, in $\cup_{f\in\tau}(f^{-1}(0))^c = \cup_{f\in\tau} f^{-1}(\mathbb{R} \setminus 0)$ je odprto pokritje kompaktnega prostora X, torej ima končno podpokritje. Torej obstajajo $f_1, ..., f_n \in \tau$, da je $\cup_{i=1}^n f_i^{-1}(\mathbb{R} \setminus 0) = X$, od koder sledi $\cap_{i=1}^n f_i^{-1}(0) = \emptyset$, kar je v nasprotju s prejšnjo ugotovitvijo, da ima vsak končen nabor funkcij iz τ skupno ničlo. S tem smo ugotovili, da imajo vse funkcije v τ neko skupno ničlo $x \in X$, torej je $\tau \subseteq \tau_x$, kar po maksimalnosti τ pomeni, da je $\tau = \tau_x$.

Za vsak $\alpha \in P$ definiramo množico $N(\alpha) = \{\tau \in \mathcal{M}(P) | \alpha \notin \tau\}$, tj. množico vseh maksimalnih podalgeber P, ki ne vsebujejo danega α. Pokazali bomo, da množice $N(\alpha)$ tvorijo bazo neke topologije na $\mathcal{M}(P)$. Dovolj je pokazati, da je družina $\{N(f) | f \in P\}$ zaprta za končne preseke, in da tvori pokritje ter vsebuje prazno množico. Hitro vidimo, da tvori pokritje; množica $N(1)$ je namreč kar enaka $\mathcal{M}(P)$; funkcija, ki je identično enaka 1, nampreč ne zadošča pogoju (1), torej se ne nahaja v nobenem $\tau \in \mathcal{M}(P)$. Ker je konstantna funkcija 0 v vsakem $\tau \in \mathcal{M}(P)$, je $N(0) = \emptyset$.

Lema 7. *Velja $N(f) \cap N(g) = N(f \cdot g)$.*

Dokaz. Ekvivalentno je pokazati $\mathcal{M}(P) - N(fg) = (\mathcal{M}(P) - N(f))(\mathcal{M}(P) - N(g))$. Na levi strani imamo tiste $\tau \in \mathcal{M}(P)$, ki vsebujejo fg, na desni strani enačbe pa množico tistih $\tau \in \mathcal{M}(P)$, ki vsebujejo f ali g. Prepoznamo, da je ta enakost ekvivalentna temu, da je τ praideal.

Dokažimo najprej, da je $\tau \in \mathcal{M}(P)$ ideal. Fiksirajmo $f \in \tau$, $g \in P$ in $\varepsilon > 0$. Naj bo sedaj $h \in \tau$ in $a \in \mathbb{R}$. Ker je g omejena funkcija, obstaja $M \in \mathbb{R}$, da je $|g| < M$. Ker sta f in h v

τ, je $f^2+h^2 \in \tau$, torej obstaja $x_0 \in X$, da je $f(x_0)^2+h(x_0)^2 < \varepsilon$, in velja tudi $|f(x_0)| < \sqrt{\varepsilon}$ in $|h(x_0)| < \sqrt{\varepsilon}$. Tedaj je $|(fg+h)(x_0)| \leq |f(x_0)g(x_0)| + |h(x_0)| < M\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon}$, torej množica $\tau' = \{fg'+h | h \in \tau, g' \in P\}$ zadošča lastnosti (1),hkrati pa je $\tau \subseteq \tau'$ (vzamemo $g'=0$). Množica τ' pa je tudi podalgebra: naj bosta $fg_1'+h_1$ in $fg_2'+h_2$ elementa τ'. Tedaj je $fg_1'+h_1-(fg_2'+h_2) = f(g_1'-g_2')+(h_1-h_2) \in \tau'$, saj sta τ in P podalgebri in zato zaprti za odštevanje. Podobno je $(fg_1'+h_1)(fg_2'+h_2) = f(fg_1'g_2'+g_1'h_2+g_2'h_1)+h_1h_2 \in \tau'$, množica pa je zaprta tudi za množenje s skalarji. Toda τ je maksimalna podalgebra glede na (1), torej je $\tau = \tau'$, in τ je ideal.

Sedaj dokažimo še, da je τ praideal. Denimo, da je $fg \in \tau$ in $f, g \notin \tau$. Potem podalgebra $\tau_1 = \{g'f+h | g' \in P, h \in \tau\}$ ne more zadoščati (1), saj vsebuje maksimalno podalgebro τ (za $g=0$), in $\tau_1 \neq \tau$ ($f \in \tau_1 \setminus \tau$). Torej obstajata $g_1' \in P$ in $h_1 \in \tau$, da je $|(g_1'f+h_1)(x)| > \varepsilon_1 > 0$ za vsak $x \in X$. Podobno lahko sklepamo za $\tau_2 = \{g'g+h | g' \in P, h \in \tau\}$. Tedaj je $|(g_1'f+h_1)(g_2'g+h_2)(x)| > \varepsilon_1\varepsilon_2 > 0$, po drugi strani pa je $(g_1'f+h_1)(g_2'g+h_2) = g_1'g_2'fg+g_1'fh_2+g_2'gh_1+h_1h_2 \in \tau$, saj je τ ideal. Prišli smo v protislovje s predpostavko, da se vse funkcije v τ poljubno približajo 0, zato je τ res praideal.

Lema 8. *1. Če na $\mathcal{M}(P)$ podamo topologijo z bazo $\{N(f) | f \in P\}$, postane $\mathcal{M}(P)$ kompakten topološki prostor.*

2. Preslikava $i_P \colon X \to \mathcal{M}(P)$, definirana s predpisom $i_P(x) = \tau_x$, je zvezna in njena slika je gosta v $\mathcal{M}(P)$.

3. Če je P unitalna podalgebra, ki loči točke, je preslikava i_P injektivna.

4. Če je X prostor Tihonova in $P = \mathcal{C}^*(X)$, je i_P vložitev.

Dokaz. 1. Vemo, da je kompaktnost dovolj preveriti na baznih množicah. Naj bo $\mathcal{M}(P) = \cup_{s\in S} N(\alpha_s)$ za neko indeksno množico S in denimo, da za vsako končno množico $A \subseteq S$ velja $\mathcal{M}(P) \setminus \cup_{s\in A} N(\alpha_s) \neq \emptyset$. Če zapišemo drugače, dobimo $\cap_{s\in A}(N(\alpha_s))^c \neq \emptyset$. Po definiciji množic $N(\alpha_s)$ je $\alpha_s \in N(\alpha_s)^c$. Ker je presek teh množic neprazen, obstaja nek $\tau_A \in \mathcal{M}(P)$, da $\{\alpha_s | s \in A\} \subseteq \tau_A \in \mathcal{M}(P)$. Naj bo τ podalgebra P, generirana z vsemi $\{\alpha_s | s \in S\}$. Vsak element v τ leži v nekem τ_A za neko končno množico $A \subseteq S$. Posledično τ izpolnjuje pogoj (1), torej obstaja $\tau' \in \mathcal{M}(P)$, da je $\tau \subseteq \tau' \in \mathcal{M}(P)$. τ pa vsebuje vse α_s, torej je $\tau' \in \mathcal{M}(P) - N(\alpha_s)$ za vsak s, kar pa pomeni, da je $\tau \in \cap_{s\in S}(N(\alpha_s))^c = (\cup_{s\in S} N(\alpha_s))^c = X - X = \emptyset$, torej tak τ' ne obstaja.

2. Zveznost je dovolj preveriti na baznih množicah. V množici $i_P^{-1}(N(\alpha)) = \{x \in X | \tau_x \in N(\alpha)\} = \{x | \alpha \notin \tau_x\}$ so ravno tiste točke, ki niso ničle funkcije α, torej je $i_P^{-1}(N(\alpha)) = \alpha^{-1}(\mathbb{R}-0)$, ki je odprta množica, saj je α zvezna.

   Denimo, da je $i_P(X) \cap N(\alpha) = \emptyset$ in $N(\alpha) \neq \emptyset$. Če želimo, da je presek $i_P(X) = \{\tau_x | x \in X\}$ z $N(\alpha)$ prazen, mora biti α v vsakem τ_x, torej $\alpha(x) = 0$ za vsak $x \in X$. Ampak $N(0) = \emptyset$ in prišli smo v nasprotje s predpostavko o nepraznosti množice $N(\alpha)$.

3. Če P loči točke, za vsaka $x_0 \neq y_0 \in X$ obstaja funkcija α, da velja $\alpha(x_0) \neq \alpha(y_0)$. Tedaj je funkcija $\alpha - \alpha(x_0) \in \tau_{x_0}$ in $\alpha - \alpha(x_0) \notin \tau_{y_0}$, torej velja $i_p(x_0) = \tau_{x_0} \neq \tau_{y_0} = i_P(y_0)$, torej je i_P res injektivna.

4. Če je X popolnoma regularen, iz trditve 3 vemo, da je $\{\alpha^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) | \alpha \in \mathcal{C}^*(X)\}$ baza za topologijo na X. Slika baznih množic s preslikavo i_P je $i_P(\alpha^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})) = N(\alpha) \cap i_P(X)$, kar pa je odprta množica v $i_P(X)$. Preslikava $i_P \colon X \to i_P(X)$ je torej zvezna, injektivna in odprta, zato je homeomorfizem na svojo sliko.

V luči te leme in leme 6 vidimo, da je za kompakten topološki prostor X preslikava $i_P \colon X \to \mathcal{M}(P)$ surjektivna. To dejstvo bomo uporabili v naslednjih dveh lemah.

Lema 9. *Če je X kompakten Hausdorffov prostor in $P = \mathcal{C}^*(X)$, je $i_P \colon X \to \mathcal{M}(P)$ homeomorfizem.*

Dokaz. Vemo, da je $\mathcal{M}(\mathcal{C}^*(X)) = \{\tau_x | x \in X\}$, torej je i_P bijektivna. Injektivna je, ker je kompakten Hausdorffov prostor normalen, algebra nad normalnim prostorom pa loči točke, in lahko uporabimo točko 3 leme 8. Kompakten Hausdorffov prostor je tudi prostor Tihonova, zato je po lemi 8 $i_P \colon X \to i_P(X) = \mathcal{M}(\mathcal{C}(X))$ odprta preslikava, zvezna odprta bijekcija pa je homeomorfizem.

Lema 10. *Naj bo P zaprta unitalna podalgebra $\mathcal{C}^*([a,b])$, ki vsebuje vse polinome. Tedaj je $i_P\colon [a,b] \to \mathcal{M}(P)$ homeomorfizem.*

Dokaz. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo $a = -1$ in $b = 1$, saj je vsak zaprt interval homeomorfen intervalu $[-1,1]$. Ker je $[-1,1]$ kompakten prostor in ker algebra polinomov na njem loči točke, je i_P bijekcija. Če dokažemo, da je odprta, je torej homeomorfizem. Kot smo videli v dokazu leme 8, je dovolj pokazati, da za vsak odprt interval (c,d) obstaja $\alpha \in P$, da velja $\alpha^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = [-1,1] \cap (c,d)$, torej da je družina $\alpha^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \cap [-1,1] | \alpha \in P$ baza topološkega prostora $[-1,1]$.

Za vsaka c, d bomo poiskali ustrezen $\alpha \in P$. V ta namen najprej pokažimo, da obstaja zaporedje polinomov, ki enakomerno konvergira k $p(x) = |x|$, torej zaradi zaprtosti P velja $p \in P$. Zapišimo

$$|x| = (x^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + (x^2 - 1))^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (x^2-1)^n,$$

kjer uporabimo razvoj funkcije $\sqrt{1+t}$ v Taylorjevo vrsto. Vrsta enakomerno konvergira za $|x^2 - 1| \leq 1$, torej za $x \in [-1,1]$. Funkcija $p(x) = |x|$ je tako enakomerna limita zaporedja polinomov $p_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \binom{\frac{1}{2}}{n}(x^2-1)^n$, in kot taka leži v P.

Posledično je funkcija q s predpisom $q(x) = x + |x|$ element podalgebre P. Naj bosta c in d dani števili, in $\alpha(x) = q(x-c)q(d-x)$. Množico $(c,d) \cap [-1,1]$ lahko tedaj dobimo kot $\alpha^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Sedaj se lotimo še drugega dela dokaza.

Lema 11. *Naj bo $f\colon X \to Y$ preslikava, P podalgebra $\mathcal{C}^*(X)$, Q pa takšna podalgebra $\mathcal{C}^*(Y)$, da je za vsak $g \in Q$ kompozitum $g \circ f \in P$.*

1. *Če za vsak $\tau \in \mathcal{M}(P)$ množica $\tau' := \{g \in Q | g \circ f \in \tau\}$ pripada $\mathcal{M}(Q)$, je preslikava $f_*\colon \mathcal{M}(P) \to \mathcal{M}(Q)$, definirana s predpisom $f_*(\tau) = \tau'$, zvezna in komutira diagram*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_p"] & Y \arrow[d, "i_Q"] \\ \mathcal{M}(P) \arrow[r, "f_*"] & \mathcal{M}(Q). \end{tikzcd}$$

2. *Če je Y kompakten Hausdorffov prostor in $Q = \mathcal{C}^*(Y)$, za vsak $\tau \in \mathcal{M}(P)$ obstaja tak $y \in Y$, da je $\tau' = \tau_y \in \mathcal{M}(Q)$, tj. τ' je maksimalna podalgebra.*

Dokaz. 1. Opazimo, da je $f_*^{-1}(N(\alpha)) = N(\alpha \circ f)$ za vsak $\alpha \in Q$, torej je f_* res zvezna. Za $x \in X$ velja $(f_* \circ i_P)(x) = f_*(\tau_x) = \tau_{f(x)} = (i_Q \circ f)(x)$, torej diagram komutira.

2. Najprej pokažimo, da je za vsak $\tau \in \mathcal{M}(P)$ τ' vsebovan v natanko enem $\tau_y \in \mathcal{M}(Q)$. Denimo, da τ' ni vsebovan v nobenem τ_y. To pomeni, da za vsak $y \in Y$ obstaja neka funkcija v τ', recimo ji α_y, za katero velja $\alpha_y(y) \neq 0$. Izberimo za vsak y neko njegovo okolico U_y, vsebovano v $\alpha_y^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Družina $\{U_y\}_{y \in Y}$ je pokritje prostora Y. Ker je Y kompakten prostor, lahko izberemo končno podpokritje iz tega pokritja $\{U_{y_i}\}_{i=1}^n$. Za funkcije $\alpha_{y_1}, \ldots, \alpha_{y_n}$ velja $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_{y_i}^2 > \varepsilon > 0$ za nek ε, saj ta funkcija zaradi kompaktnosti Y doseže minimum, ki pa je strogo večji od 0 – vsak y je namreč vsebovan v nekem U_{y_j} za nek $j \in \{1, \ldots, n\}$, torej je $\alpha_{y_j}^2(y) > 0$. Funkcija α pa je element τ', torej mora veljati $\alpha \circ f \in \tau$, kar pa je protislovje, saj je $|\alpha \circ f| > \varepsilon > 0$.

   Denimo sedaj, da je $\tau' \subseteq \tau_y$ in $\tau' \subseteq \tau_z$, pri čemer sta τ_y in τ_z različna. Prostor Y je normalen, zato lahko po Urysohnovi lemi najdemo funkciji g in g', za kateri velja $gg' = 0$ in $g(y) \neq 0$, $g'(z) \neq 0$, torej $g \notin \tau_y$ in $g' \notin \tau_z$. Iz $gg' = 0$ sledi, da je tudi $(g \circ f)(g' \circ f) = 0$, ničelna funkcija pa je v vsakem maksimalnem idealu, torej tudi v τ. Iz dokaza leme 7 vemo, da je τ praideal, torej mora biti vsaj ena od funkcij $g \circ f$ in $g' \circ f$ vsebovana v τ. Po definiciji τ' je torej vsaj ena od funkcij g in g' vsebovana v τ', kar nas privede v protislovje. τ' je torej vsebovana v natanko enem τ_y.

Pokazati moramo še obratno inkluzijo, torej da je $\tau_y \subseteq \tau'$, seveda za tisti enolični y iz prejšnjega odstavka. Naj bo U odprta okolica y in naj bo $g \in Q$ tak, da je $g|_U = 0$. Naj bo V takšna okolica y, da je $\mathrm{Cl}(V) \subseteq U$. Po Urysohnovi lemi obstaja $h \in Q$, za katerega velja $h(y) = 1$ in $h|_{Y \setminus V} = 0$. Tedaj je produkt $hg = 0$ na celem Y, torej je tudi $(h \circ f)(g \circ f) = 0$ na celem X, in je torej element podalgebre τ. Ker je τ praideal, je $g \circ f \in \tau$ ali pa je $h \circ f \in \tau$. Posledično je $h \in \tau'$ ali pa $g \in \tau'$. Vemo, da je $\tau' \subseteq \tau_y$, torej h ne more biti v τ', zato je nujno $g \in \tau'$.

Vsak $g \in \tau_y$ je limita nekega zaporedja $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, kjer za vsak člen velja $g_n|_{U_n} = 0$ za neko odprto okolico U_n točke y. Res, naj bo $U_n = g^{-1}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ in naj bo $V_n = Y \setminus g^{-1}(-\frac{2}{n}, \frac{2}{n})$. Množici V_n in $\mathrm{Cl}_Y(U_n)$ sta zaprti in disjunktni, zato po Urysohnovi lemi obstaja funkcija $h_n \colon Y \to [0,1]$, za katero velja $h_n(\mathrm{Cl}_Y(U_n)) = 0$ in $h_n(V_n) = 1$. Zaporedje funkcij $g_n = h_n g$ tedaj enakomerno konvergira h g in zanj velja, da je $g_n|_{U_n} = 0$. Po zgornjem razmisleku velja $g_n \in \tau'$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

V primeru, ko je Q zaprtje polinomov, po lemi 10 vemo, da je tudi $|x|$ funkcija v Q. To nam pomaga pri definiranju zapotedja funkcij h_n, za katerega je $h_n = 0$ na $(y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n})$ in enaka 1 izven $(y - \frac{2}{n}, y + \frac{2}{n})$, zato za zaporedje $g_n = h_n g$ velja $g_n|_{(y-\frac{1}{n}, y+\frac{1}{n})} = 0$ in zaporedje enakomerno konvergira h g. V obeh primerih je $g \in \tau_y$ limita nekih funkcij v Q, ki izginejo na dovolj majhni okolici y.

Denimo, da za njihovo limito g velja $g \notin \tau'$, oziroma ekvivalentno $g \circ f \notin \tau$. Tedaj obstajata nek element $h \in \tau$ in nek $\varepsilon > 0$, da je $\inf_{x \in X}\{|(g \circ f)(x) + h(x)|\} > \varepsilon > 0$. Za ta ε obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $|g_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedaj je $|g_n \circ f + h| = |g \circ f + h - (g \circ f - g_n \circ f)| \geq ||g \circ f + h| - |g \circ f - g_n \circ f|| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$, kar pomeni, da τ ne zadošča pogoju (1), to pa je v nasprotju s predpostavko, da je $\tau \in \mathcal{M}(P)$. Zaključimo lahko, da je $g \in \tau'$ in $\tau' = \tau_y$.

Lema 12. *Naj bo P zaprta unitalna podalgebra v $\mathcal{C}^*(X)$.*

1. *Za vsak $\alpha \in P$, $\alpha \colon X \to [a,b]$ obstaja tak $\alpha' \colon \mathcal{M}(P) \to [a,b]$, da je $\alpha' \circ i_P = \alpha$.*
2. *Prostor $\mathcal{M}(P)$ je Hausdorffov.*
3. *Če je Y kompakten Hausdorffov in $\alpha \colon X \to Y$ tak, da je $P_\alpha \subseteq P$, obstaja enolično določen $\alpha' \colon \mathcal{M}(P) \to Y$, za katerega velja $\alpha = \alpha' \circ i_P$.*

Dokaz. 1. Naj bo Q zaprtje vseh polinomov na $[a,b]$. Funkcija $g \circ \alpha$ je vsebovana v P za vsak polinom $g \in Q$, saj je le linearna kombinacija potenc funkcije α. Ker je P zaprta, mora biti $g \circ \alpha \in P$ za vsak $g \in Q$. Torej so izpoljeni pogoji leme 11, kar pomeni, da obstaja preslikava $\alpha_* \colon \mathcal{M}(P) \to \mathcal{M}(Q)$, za katero velja $i_Q \circ \alpha = \alpha_* \circ i_P$. Po lemi 10 je i_Q homeomorfizem, torej je $\alpha = i_Q^{-1} \circ \alpha_* \circ i_P$. Za iskano funkcijo α' tako okličemo $i_Q^{-1} \circ \alpha_*$.

2. Naj bosta τ_1 in τ_2 različna elementa $\mathcal{M}(P)$. Ker sta oba maksimalni podalgebri glede na lastnost (1), nobena od njiju ni vsebovana v drugi. Torej obstaja $\alpha \in \tau_1 \setminus \tau_2$, $\alpha \colon X \to [a,b]$. Funkcija α je namreč omejena, zato obstajata končni števili a in b, za kateri je $\alpha(X) \subseteq [a,b]$. Oglejmo si $\alpha'(\tau_1)$ in $\alpha'(\tau_2)$. Vedeti moramo, kaj sta $\alpha_*(\tau_1)$ in $\alpha_*(\tau_2)$; to sta $\tau_1' = \{g \in Q | g \circ \alpha \in \tau_1\}$ in $\tau_2' = \{g \in Q | g \circ \alpha \in \tau_2\}$. Ti dve množici sta različni, saj prva vsebuje identitetno preslikavo, druga pa ne; $\mathrm{id} \circ \alpha = \alpha$ je namreč element τ_1, ne pa tudi τ_2. Preslikava i_Q je bijektivna, zato je $\alpha'(\tau_1) \neq \alpha'(\tau_2)$. Ker α' slika v Hausdorffov prostor, lahko najdemo disjunktni odprti okolici U_1 in U_2 točk $\alpha'(\tau_1)$ in $\alpha'(\tau_2)$, seveda pa to pomeni, da sta $\alpha'^{-1}(U_1)$ in $\alpha'^{-1}(U_2)$ disjunktni odprti okolici τ_1 in τ_2.

3. Tudi v tej točki lahko uporabimo lemo 11. Če je $Q = \mathcal{C}^*(Y)$, so zaradi pogojev leme izpolnjeni pogoji leme 11, in obstaja preslikava $\alpha_* \colon \mathcal{M}(P) \to \mathcal{M}(Q)$, za katero velja $i_Q \circ \alpha = \alpha_* \circ i_P$. Po lemi 9 je i_Q homeomorfizem, in definiramo lahko $\alpha' = i_Q^{-1} \circ \alpha_*$. Ta preslikava je enolična, saj je določena na gosti podmnožici $i_P(X) \subseteq \mathcal{M}(P)$ in slika v Hausdorffov prostor Y.

Če sta $f, g \in P$, opazimo $f + g = f' \circ i_P + g' \circ i_P = (f' + g') \circ i_P$, po drugi strani pa je $f + g = (f+g)' \circ i_P$. Zaradi enoličnosti sledi, da je $(f+g)' = f' + g'$. Podobno velja $(fg)' = f'g'$, konstantne preslikave pa se preslikajo v konstantne preslikave enake vrednosti. Predpis $f \mapsto f'$ tako določa nek homomorfizem $\mathcal{C}^*(X) \to \mathcal{C}^*(\mathcal{M}(P))$. Prva točka zgornje leme pomeni, da je $P \subseteq P_{i_P}$, naslednja lema pa dokaže še inkluzijo v obratno smer.

Lema 13. *Naj bo P zaprta unitalna podalgebra algebre $\mathcal{C}^*(X)$. Potem za vsak $g\colon \mathcal{M}(P) \to \mathbb{R}$ kompozitum $g \circ i_P$ pripada P.*

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$ in $g\colon \mathcal{M}(P) \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Za vsak $y \in \mathcal{M}(P)$ izberimo takšno okolico $U_y = N(\alpha_y)$ za nek $\alpha_y \in P$, da velja $|g(z) - g(z')| < \varepsilon$ za vsaka $z, z' \in U_y$. Takšno okolico lahko izberemo zaradi zveznosti g in ker je družina $\{N(\alpha) | \alpha \in P\}$ baza za topologijo na $\mathcal{M}(P)$. Ker je $\mathcal{M}(P)$ kompakten prostor, lahko izberemo $y_1, y_2, \dots, y_k$, da je $\cup_{i=1}^k U_{y_i} = \mathcal{M}(P)$. Če je $i_P(x) \in U_{y_i}$, velja $|g(y_i) - (g \circ i_P)(x)| < \varepsilon$, če pa $i_P(x) \notin U_{y_i}$, je $\alpha_{y_i} \in \tau_x$, torej je $\alpha_{y_i}(x) = 0$. Za vsak $x \in X$ zato drži neenakost

$$\left|\sum_{i=1}^{k}((g(y_i) - g \circ i_P(x))\alpha_{y_i}(x))\right| \leq \sum_{i=1}^{k}(|(g(y_i) - g \circ i_P(x))||\alpha_{y_i}(x))| < \varepsilon \sum_{i=1}^{k} ||\alpha_{y_i}||.$$

Funkcija $\tilde{g} = \sum_{i=1}^k g(y_i)\alpha_{y_i}$ je element podalgebre P, saj je linearna kombinacija njenih elementov. Če lahko za α_{y_i} izberemo takšne funkcije $\widetilde{\alpha_{y_i}} \geq 0$, da je $\sum_{i=1}^k \widetilde{\alpha_{y_i}}(x) = 1$ na celotnem X, lahko zapišemo

$$|\tilde{g}(x) - g \circ i_P(x)| = \left|\sum_{i=1}^{k} g(y_i)\widetilde{\alpha_{y_i}} - g \circ i_P(x) \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\alpha_{y_i}}(x)\right| = \left|\sum_{i=1}^{k}((g(y_i)(x) - g \circ i_P(x))\widetilde{\alpha_{y_i}}(x))\right| < \varepsilon.$$

Tedaj je $g \circ i_P$ poljubno blizu nekemu $\tilde{g} \in P$, in zaradi zaprtosti P je potemtakem tudi $g \circ i_P \in P$.

Preostane nam le še dokazati obstoj takšnih funkcij $\widetilde{\alpha_{y_i}}$. Okolic U_{y_i} nič ne spremenimo, če vzamemo $U_{y_i} = N(\alpha_{y_i}^2)$, saj je $N(\alpha_{y_i}^2) = N(\alpha_{y_i}\alpha_{y_i}) = N(\alpha_{y_i}) \cap N(\alpha_{y_i}) = N(\alpha_{y_i})$. Naj bo $\alpha = (\sum_{i=1}^k \alpha_{y_i}^2)'\colon \mathcal{M}(P) \to \mathbb{R}$. Ker ta funkcija slika iz kompakta, je omejena. Pokažimo, da je funkcija $\sum_{i=1}^k \alpha_{y_i}^2$ pozitivna. Naj bo $y \in \mathcal{M}(P)$. Množica $T_y = \{h \in P | h'(y) = 0\}$ zadošča lastnosti (1), saj za vsak h iz te množice velja $h = h' \circ i_P$, $i_P(X)$ pa je gosta množica v $\mathcal{M}(P)$. Množica T_y pa je tudi algebra: za $h, k \in T_y$ namreč velja $(h - k)'(y) = h'(y) - k'(y) = 0$ in $(hk)'(y) = h'(y)k'(y) = 0$, podobno je zaprta tudi za množenje s skalarji. Posledično je T_y vsebovan v nekem $\tau \in \mathcal{M}(P)$. Obstaja torej α_{y_i}, da je $T_y \subseteq \tau \in N(\alpha_{y_i})$. Denimo, da je $\alpha_{y_i}'(y) = 0$. Tedaj je $\alpha_{y_i} \in T_y \subseteq \tau \in N(\alpha_{y_i})$, kar pa nas privede v protislovje, saj so v $N(\alpha_{y_i})$ prav tisti τ, ki ne vsebujejo α_{y_i}. Funkcija α torej slika v zaprt interval $[a, b]$ za neka $0 < a < b < \infty$. Potem pa tudi funkcija $\sum_{i=1}^k \alpha_{y_i}^2$ slika v isti interval. Zapišemo lahko

$$\beta := \frac{1}{\sum_{i=1}^k \alpha_{y_i}^2} = \frac{1}{b}\frac{1}{1 - \frac{b - \sum_{i=1}^k \alpha_{y_i}^2}{b}} = \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b - \sum_{i=1}^k \alpha_{y_i}^2}{b}\right)^n,$$

torej je β limita zaporedja funkcij iz P; vsaka zgornja delna vsota je namreč v P, in vsota konvergira, saj je $\frac{b - \sum_{i=1}^k \alpha_{y_i}^2}{b} \leq \frac{b-a}{b} < 1$. Bazna množica, ki jo določa β, pa je kar cel prostor, saj je $\mathcal{M}(P) = N(1) = N(\beta) \cap N(\sum_{i=1}^k \alpha_{y_i}^2)$. Od tod lahko dobimo $\widetilde{\alpha_{y_i}} = \beta\alpha_{y_i}^2$. Za te funkcije velja, da določajo enake bazne množice kot α_{y_i}, in da se seštejejo v 1.

Zadnji dve lemi skupaj nam povesta, da je $P_{i_P} = P$. Oboroženi s tem arzenalom lem lahko sedaj dokažemo trditve izreka.

Dokaz (Dokaz izreka 4). Ker je $i_P^*\colon \mathcal{C}^*(Y) \to \mathcal{C}^*(X)$ izometrija, je injektivna, da je njena slika ravno P, pa pravita zadnji dve lemi.

Če je $f\colon X \to Y$ kompaktna Hausdorffova razširitev prostora X in je P tista podalgebra, ki jo določa f, tj. $P = P_f$, bi radi pokazali, da obstaja $\tilde{f}\colon \mathcal{M}(P) \to Y$, ki je homeomorfizem. Po lemi 12 vemo, da obstaja $f'\colon \mathcal{M}(P) \to Y$, da je $f = f' \circ i_P$. Ker je slika f gosta v Y, mora biti tudi slika $f'\colon \mathcal{M}(P) \to Y$ gosta v Y. Slika kompaktnega prostora v Hausdorffovem prostoru pa je zaprta, zato je f' zaprta in surjektivna. Po trditvi **??** je $(f')^*\colon \mathcal{C}^*(Y) \to \mathcal{C}(\mathcal{M}(P))$ izometrija algeber, obe algebri $\mathcal{C}^*(Y)$ in $\mathcal{C}^*(\mathcal{M}(P))$ pa ločita točke, saj sta prostora Y in $\mathcal{M}(P)$ normalna. Zato mora biti f' injektivna; vsaka funkcija v $\mathcal{C}^*(\mathcal{M}(P))$ je namreč oblike $g \circ f'$ za nek $g \in \mathcal{C}(Y)$. Tako smo pokazali, da je f' zaprta bijekcija, in zato homeomorfizem. Ker je prostor $i_P(X)$ gost v $\mathcal{M}(P)$, je f' določena na gosti podmnožici $\mathcal{M}(P)$, in f' slika v Hausdorffov prostor, zato je f' enolično določena.

Naj bo sedaj $f\colon X \to Y$ zvezna preslikava med poljubnima topološkima prostoroma X in Y. Naj bosta $Q \subseteq \mathcal{C}^*(Y)$ in $P \subseteq \mathcal{C}^*(X)$ takšni zaprti unitalni podalgebri, za kateri velja $f^*(Q) \subseteq P$. Naredimo lahko kompozitum $\alpha := i_Q \circ f\colon X \to \mathcal{M}(Q)$. Po lemi 13 je za vsak $g\colon \mathcal{M}(Q) \to \mathbb{R}$ kompozitum $g \circ i_Q \in Q$, zato je $g \circ \alpha \in P$. Sedaj so izpoljeni pogoji leme 12, zato obstaja enolična preslikava $f_*\colon \mathcal{M}(P) \to \mathcal{M}(Q)$, za katero velja $f_* \circ i_P = \alpha = i_Q \circ f$, torej komutira diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_P"] \arrow[dr, "\alpha"] & Y \arrow[d, "i_Q"] \\ \mathcal{M}(P) \arrow[r, "f_*"] & \mathcal{M}(Q). \end{tikzcd}$$

S tem je dokaz glavnega izreka končan. Oglejmo si izrek še v malo drugačni luči.

2.1 Urejenost na množici kompaktnih Hausdorffovih razširitev

Naj bo $\mathcal{K}(X)$ množica[2] vseh Hausdorffovih razširitev topološkega prostora X, in naj bo $\mathcal{A}(X)$ množica vseh zaprtih unitalnih podageber algebre $\mathcal{C}^*(X)$. Definirajmo preslikavi $\mathcal{P}\colon \mathcal{K}(X) \to \mathcal{A}(X)$ s predpisom $(K, j) \mapsto P_j = \{f \circ j | f \in \mathcal{C}^*(K)\}$ in $\mathcal{M}\colon \mathcal{A}(X) \to \mathcal{K}(X)$ s predpisom $P \mapsto (\mathcal{M}(P), i_P)$. Druga preslikava je dobro definirana po prvem delu izreka 4.

Za vsako preslikavo $f\colon X \to Y$ bomo skonstruirali relacijo med $\mathcal{K}(X)$ in $\mathcal{K}(Y)$, ter relacijo med $\mathcal{A}(X)$ in $\mathcal{A}(Y)$.

Naj bo $f\colon X \to Y$ zvezna preslikava in naj bosta $(K, j) \in \mathcal{K}(X)$ in $(K', j') \in \mathcal{K}(Y)$. Rečemo, da je $(K', j') \leq_f (K, j)$, če obstaja zvezna preslikava $g\colon K \to K'$, da komutira diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"] & Y \arrow[d, "j'"] \\ K \arrow[r, "g"] & K'. \end{tikzcd}$$

Za podalgebri $P \in \mathcal{A}(X)$ in $Q \in \mathcal{A}(Y)$ pa rečemo, da je $Q \subseteq_f P$, če je $f^*(Q) \subseteq P$. V tem jeziku se drugi del izreka 4 prepiše v:

Izrek 14. *Naj bo $f\colon X \to Y$ zvezna preslikava. Tedaj velja:*

1. *za $P \in \mathcal{A}(X)$ in $Q \in \mathcal{A}(Y)$ je $Q \subseteq_f P$ natanko tedaj, ko je $(\mathcal{M}(Q), i_Q) \leq_f (\mathcal{M}(P), i_P)$ in*
2. *Za $(K, j) \in \mathcal{K}(X)$ in $(K', j') \in \mathcal{K}(Y)$ velja $(K', j') \leq_f (K, j)$ natanko tedaj, ko je $P_{j'} \subseteq_f P_j$.*

Dokaz. 1. Če je $Q \subseteq_f P$, je po izreku 4 tudi $(\mathcal{M}(Q), i_Q) \leq_f (\mathcal{M}(P), i_P)$.

Če je $(\mathcal{M}(Q), i_Q) \leq_f (\mathcal{M}(P), i_P)$, po komutativnosti diagrama iz definicije relacije dobimo $f^*(Q) = f^*(P_{i_Q}) = f^*(i_Q^*(\mathcal{C}^*(\mathcal{M}(Q)))) = (i_P^* \circ g^*)(\mathcal{C}^*(\mathcal{M}(Q))) \subseteq i_P^*(\mathcal{C}^*(\mathcal{M}(P)))$.

2. Naj bo $(K', j') \leq_f (K, j)$. Potem velja $j' \circ f = g \circ j$. Zato je $f^*(P_{j'}) = (f^* \circ j'^*)(\mathcal{C}^*(K')) = (j^* \circ g^*)(\mathcal{C}^*(K')) \subseteq j^*(\mathcal{C}^*(K)) = P_j$.

Dokažimo še implikacijo v drugo smer. Iz glavnega izreka dobimo sledeč komutativen diagram:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "j"'] \arrow[d, "i_{P_j}"] & Y \arrow[d, "i_{P_{j'}}"] \arrow[dr, "j'"] & \\ K \arrow[r, "g_1"] & \mathcal{M}(P_i) \arrow[r, "f_*"] & \mathcal{M}(P_j) & K', \arrow[l, "g_2"'] \end{tikzcd}$$

kjer sta g_1 in g_2 homeomorfizma, torej obstaja tak $g = g_2^{-1} \circ f_* \circ g_1$, da komutira

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & Y \arrow[d, "j"] \\ K \arrow[r, "g"] & K' \end{tikzcd}$$

[2] Tehnično moramo tukaj na množice K iz kompaktnih Hausdorffovih razširitev (kot na množice, ne kot na topološke prostore) gledati do izomorfizma množic natančno, saj je sicer $\mathcal{K}(X)$ pravi razred. Tu tej tehnikaliji ne bomo posvečali pozornosti.

in je torej $(K', j') \leq_f (K, j)$.

Če v zgornjem izreku vzamemo $Y = X$ in $f = \mathrm{id}_X$, dobimo relacijo $\subseteq$ (navadno relacijo vsebovanosti) na $\mathcal{A}(X)$ in relacijo $\leq$ na $\mathcal{K}(X)$. Množica $\mathcal{A}(X)$, opremljena z relacijo $\subseteq$, je *delno urejena množica*, tj, relacija $\subseteq$ je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna. Množica $\mathcal{K}(X)$ z relacijo $\leq$ ni delno urejena; relacija $\leq$ je refleksivna in tranzitivna, ni pa antisimetrična. Zato na množico $\mathcal{K}(X)$ uvedemo ekvivalenčno relacijo $\sim$. Rečemo, da je $(K, j) \sim (K', j')$, če obstaja tak homeomorfizem $g\colon K \to K'$, da komutira diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "j"] & Y \arrow[d, "j'"] \\ K \arrow[r, "g"] & K'. \end{tikzcd}$$

To je natanko tedaj, ko je $(K, j) \leq (K', j')$ in $(K', j') \leq (K, j)$; če sta razširitvi ekvivalentni, je očitno ena manjša od druge in obratno. Če pa je $(K, j) \leq (K', j')$ in $(K', j') \leq (K, j)$, obstajata preslikavi $f\colon K' \to K$ in $g\colon K \to K'$, da komutirata diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "j'"] & X \arrow[d, "j"] \\ K' \arrow[r, "f"] & K \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "j"] & X \arrow[d, "j'"] \\ K \arrow[r, "g"] & K'. \end{tikzcd}$$

Potem je $f \circ j' = j$ in $g \circ j = j'$, torej $f \circ g \circ j = j$. Zato je $f \circ g = \mathrm{id}_{j(X)}$ na gosti podmnožici $j(X) \subseteq K$. Ker je K Hausdorffov prostor, je $f \circ g = \mathrm{id}_K$. Podobno velja tudi $g \circ f = \mathrm{id}_{K'}$, zato sta f in g homeomorfizma. Kompaktni Hausdorffovi razširitvi (K, j) in (K', j') sta torej v relaciji. Hitro se lahko prepričamo, da je relacija $\sim$ res ekvivalenčna.

Za dve kompaktni Hausdorffovi razširitvi (K, j) in (K', j') tako pravimo, da sta ekvivalentni, če sta prostora K in K' homeomorfna in X na enak način živi v obeh. Za kompaktni razširitvi (K, j) in (K', j') lahko velja, da sta prostora K in K' homeomorfna, vendar pa razširitvi nista ekvivalentni.

Relacija $\sim$ je usklajena z relacijo $\leq$. Res, naj bo $(K, j) \leq (K', j')$ in naj bo $(K_1, j_1) \sim (K, j)$ ter $(K_1', j_1') \sim (K', j')$. Tedaj obstajajo preslikava $f\colon K \to K'$ in homeomorfizma $g\colon K_1 \to K$ in $g'\colon K' \to K_1'$, da komutira diagram

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "j_1"'] \arrow[d, "j"] & X \arrow[d, "j'"] \arrow[dr, "j_1'"] & \\ K_1 \arrow[r, "g"] & K \arrow[r, "f"] & K' \arrow[r, "g'"] & K_1', \end{tikzcd}$$

torej velja $(K_1', j_1') \leq (K_1, j_1)$. Če relacijo $\leq$ iz množice $\mathcal{K}(X)$ prenesemo na $\mathcal{K}(X)/_\sim$, torej dobimo delno urejeno množico. Tranzitivnost in refleksivnost se ohranjata, z uvedbo ekvivalenčne relacije pa smo poskrbeli tudi za antisimetričnost. Z uvedbo relacije $\sim$ smo namreč relaciji $\leq$ dodali antisimetrično ovojnico.

Preslikavo $\mathcal{M}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{K}(X)$ popravimo v preslikavo $\widetilde{\mathcal{M}}\colon \mathcal{A}(X) \to \mathcal{K}(X)/_\sim$ s predpisom $\tilde{\mathcal{M}}(P) = [\mathcal{M}(P)]$, kjer oznaka $[(\mathcal{M}(P), i_P)]$ pomeni ekvivalenčni razred kompaktne Hausdorffove razširitve $(\mathcal{M}(P), i_P)$ po relaciji $\sim$. Ker za dve ekvivalentni kompaktni Hausdorffovi razširitvi (K, j) in (K', j') velja $(K, j) \leq (K', j')$ in $(K', j') \leq (K, j)$, obe razširitvi definirata isto podalgebro $P \in \mathcal{A}(X)$, zato je tudi preslikava $\widetilde{\mathcal{P}}\colon \mathcal{K}(X)/_\sim \to \mathcal{A}(X)$ s predpisom $[(K, i)] \mapsto P_i$ dobro definirana.

Kot posledico izreka 14 in zgornje razprave lahko sedaj zapišemo

Izrek 15. *Delno urejeni množici $\mathcal{A}(X)$ in $\mathcal{K}(X)/_\sim$ sta izomorfni.*

3. Posledice

3.1 Izrek Tihonova

Eden pomembnejših rezultatov splošne topologije je izrek Tihonova, ki pravi, da je kompaktnost multiplikativna lastnost. Andrej Nikolajevič Tihonov je prvi leta 1930 dokazal, da je poljuben produkt enotskih intervalov spet kompakten, pet let kasneje pa je zapisal izrek v vsej splošnosti. Prva znana objava polnega dokaza pa je iz leta 1937 in pripada Eduardu Čechu.

Posledica 16 (izrek Tihonova). *Če je $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ družina kompaktnih Hausdorffovih prostorov, je prostor $\Pi_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ kompakten in Hausdorffov.*

Dokaz. Naj bo $X = \Pi_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ in $P = \mathcal{C}^*(X)$. Za vsak $\lambda \in \Lambda$ obstaja po lemi 12 zvezna preslikava $\pi'_\lambda\colon \mathcal{M}(P) \to X_\lambda$, da velja $\pi'_\lambda \circ i_P = \pi_\lambda$, kjer je $\pi_\lambda\colon X \to X_\lambda$ projekcija na X_λ. Naj bo $g = \Pi_{\lambda\in\Lambda}\pi'_\lambda\colon \mathcal{M}(P) \to X$. Ker je preslikava $\pi_\lambda \circ g = \pi'_\lambda$ zvezna za vsak $\lambda \in \Lambda$, je g zvezna preslikava. Velja $g \circ i_P = \Pi_{\lambda\in\Lambda}\pi'_\lambda \circ i_P = \Pi_{\lambda\in\Lambda}\pi_\lambda = \mathrm{id}_X$, in $i_P \circ g \circ i_P = i_P$. Preslikava $i_P \circ g\colon \mathcal{M}(P) \to \mathcal{M}(P)$ je torej identiteta na gosti podmnožici $i_P(X) \subseteq \mathcal{M}(P)$ in slika v Hausdorffov prostor, torej je identiteta na celotnem $\mathcal{M}(P)$. Preslikava $g\colon \mathcal{M}(P) \to X$ je potemtakem homeomorfizem, in ker je $\mathcal{M}(P)$ kompakten Hausdorffov topološki prostor, je takšen tudi $X = \Pi_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$.

3.2 O kompaktifikacijah topoloških prostorov

(Hausdorffova) kompaktifikacija topološkega prostora X je takšna Hausdorffova razširitev (K, i) prostora X, da je $i\colon X \to i(X)$ homeomorfizem. Iz dokaza izreka 4 je razvidno, da je potreben pogoj za obstoj Hausdorffove kompaktifikacije, da algebra zveznih omejenih funkcij $\mathcal{C}^*(X)$ loči točke. Zadosten pogoj za obstoj kakšne kompaktifikacije je, da je X prostor Tihonova, kot je razvidno iz leme 8.

3.2.1 Kompaktifikacija z eno točko

Ta kompaktifikacija je najmanjša od vseh kompaktifikacij glede na urejenost iz izreka 14. Lokalno kompaktnemu nekompaktnemu Hausdorffovemu prostoru X dodamo eno točko tako, da postane kompakten. Naj bo $\infty \notin X$, in označimo $X^+ = X \cup \{\infty\}$. Naj bo $i\colon X \to X^+$ preslikava s predpisom $i(x) = x$. Na množico X^+ uvedemo topologijo, in sicer za odprte množice proglasimo družino $\mathcal{O} = \tau \cup \{\{\infty\} \cup (X \setminus F) | F$ je kompaktna v $X\}$, kjer je τ topologija na prostoru X. Tehnične podrobnosti konstrukcije in njeno enoličnost si lahko bralec natančneje ogleda v [3, poglavje 2.2.4.]

Prostor lahko kompaktificiramo z eno točko na samo en način. Zanima nas, kako lahko to storimo s pomočjo izreka 4. Brez škode za splošnost lahko gledamo kar kompaktifikacijo z eno točko X^+, saj so ji vse druge kompaktifikacije z eno točko ekvivalentne. Vemo, da algebro, ki določa kompaktifikacijo, ekvivalentno (X^+, i), dobimo z algebro $P_i = \{g \circ i | g \in \mathcal{C}^*(X^+)\}$. Ali lahko to algebro opišemo tudi kako drugače?

Funkcija $g \circ i$ je pravzaprav zožitev funkcije g na prostor X. Ker iz definicijskega območja s tem vzamemo le eno točko, si lahko predstavljamo, da funkcija $g \circ i$ "limitira" proti neki vrednosti "z vseh strani", ko se približuje manjkajoči točki ∞. Ti pojmi za splošne topološke prostore niso dobro definirani, zato moramo postopati malo drugače.

Za vsako funkcijo $g \in \mathcal{C}^*(X^+)$ si oglejmo $g^{-1}(g(\infty)-\varepsilon, g(\infty)+\varepsilon)$. Za vsak ε je to odprta množica in vsebuje točko ∞, torej je oblike $\{\infty\} \cup (X \setminus F)$ za neki kompakt $F \subseteq X$. Za vsak $\varepsilon > 0$ torej obstaja nek kompakten podprostor prostora X, da se izven njega funkcija g vrednosti $g(\infty)$ približa za manj kot ε. Ko funkcijo g zožimo na X, mora ohraniti to lastnost - seveda brez sklicevanja na vrednost v ∞. Tako dobimo:

$$P_i = \{f \in \mathcal{C}^*(X) | \forall\varepsilon > 0\ \exists \text{ kompakt } F \subseteq X, \text{ da } |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ \forall x, y \in X \setminus F\}.$$

Želimo dokazati še, da je med kompaktifikacijami nekompaktnega lokalno kompaktnega Hausdorffovega prostora kompaktifikacija z eno točko najmanjša v smislu izreka 14. Najprej dokažimo sledečo lemo:

Lema 17. *Lokalno kompakten gost podprostor M Hausdorffovega prostora X je odprt.*

Dokaz. Naj bo $x \in M$. Ker je M lokalno kompakten prostor, obstaja okolica U točke x, ki je odprta v M, za katero velja, da je $\mathrm{Cl}_M(U) = \mathrm{Cl}_X(U) \cap M$ kompaktna podmnožica prostora M. Ker je M podprostor prostora X, je inkluzija iz M v X zvezna preslikava. Kot zvezna slika kompakta je $\mathrm{Cl}_X(U) \cap M$ kompaktna podmnožica prostora X, in ker je X Hausdorffov prostor, je $\mathrm{Cl}_X(U) \cap M$ zaprta podmnožica v X. Velja tudi, da je $U \subseteq \mathrm{Cl}_X(U)$ in $U \subseteq M$, in torej je $U \subseteq \mathrm{Cl}_X(U) \cap M$. Zato je $\mathrm{Cl}_X(U) \subseteq \mathrm{Cl}_X(\mathrm{Cl}_X(U) \cap M) = \mathrm{Cl}_X(U) \cap M \subseteq M$. Množica U je oblike $U = V \cap M$ za neko odprto množico $V \subseteq X$. Tedaj velja $V \subseteq \mathrm{Cl}_X(V) = \mathrm{Cl}_X(V \cap M) = \mathrm{Cl}_X(U) \subseteq M$. Za vsako točko $x \in M$ smo torej našli odprto okolico $V \subseteq X$, da je $V \subseteq M$, kar pa pomeni, da je M odprt podprostor v X.

Posledica 18. *Naj bo (K, j) Hausdorffova kompaktifikacija lokalno kompaktnega prostora X. Tedaj je preslikava j odprta vložitev.*

Dokaz. Prostor $j(X)$ je homeomorfna slika prostora X, in je zato lokalno kompaktna. Tedaj je $j(X)$ odprta podmnožica v K. Vložitev, katere slika je odprta, pa je odprta vložitev.

Pripravili smo si teren za dokaz sledeče trditve.

Trditev 19. *Naj bo X nekompakten lokalno kompakten Hausdorffov prostor. Njegova enotočkovna kompaktifikacija je tedaj najmanjša med Hausdorffovimi kompaktifikacijami prostora X (glede na ureditev iz izreka 14).*

Dokaz. Naj bo (K, j) kompaktifikacija prostora X, in (X^+, i) enotočkovna kompaktifikacija prostora X. Privzamemo lahko, da je X podprostor prostora X^+, in da je $i\colon X \to X^+$ običajna vložitev podprostora. Preslikava $j\colon X \to K$ je odprta, in je homeomorfizem na svojo sliko. Definirajmo preslikavo $f\colon K \to X^+$ s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} i \circ j^{-1}; & x \in j(X) \\ \infty; & \text{sicer.} \end{cases}$$

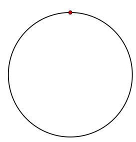
Za tako definirano preslikavo f komutira diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "j"] \\ X^+ & K. \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

Pokazati moramo le še, da je preslikava f zvezna. Naj bo U odprta podmnožica v X^+. Če $\infty \notin U$, je $f^{-1}(U) = j(i^{-1}(U))$. Ker je i zvezna in j odprta, je ta množica odprta v K. Če pa je $\infty \in U$, je $f^{-1}(U) = f^{-1}(\{\infty\} \cup (X \setminus F)) = f^{-1}((\{\infty\} \cup X) \setminus F) = K \setminus f^{-1}(F)$ za neko kompaktno podmnožico $F \subseteq X$. Za tak F pa je $f^{-1}(F) = j(i^{-1}(F)) = j(F)$. Zvezna slika kompakta pa je tudi sama kompaktna, torej je $j(F)$ kot kompaktna podmnožica Hausdorffovega prostora zaprta. Množica $f^{-1}(U) = K \setminus j(F)$ je torej odprta, in f je zvezna.

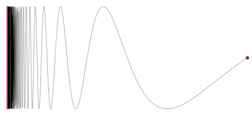
Posledica 20. *Naj bo (K, j) kompaktifikacija nekompaktnega lokalno kompaktnega Hausdorffovega prostora X. Tedaj algebra $\mathcal{C}^*(K)$ vsebuje izometrično sliko algebre $P_i = \{f \in \mathcal{C}^*(X) | \forall \varepsilon > 0\ \exists$ kompakt $F \subseteq X,$ da $|f(x) - f(y)| < \varepsilon\ \forall x, y \in X \setminus F\}$.*

Primer 1. Oglejmo si kompaktifikacijo z eno točko intervala $(0, 1)$. Katere funkcije bi ustrezale zgornjemu pogoju? Vemo, da je kompaktifikacija z eno točko odprtega intervala krožnica, zato bodo ustrezne funkcije ravno tiste, ki bodo limitirale proti isti vrednosti, ko se bodo približevale robnima točkama intervala. Prav te funkcije lahko namreč zvezno razširimo do še ene točke. Tako tudi ugotovimo, da so maksimalne podalgebre glede na lastnost (1) v $P = \{f \in \mathcal{C}^*((0, 1)) | \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x)\}$ vsi tisti, ki so oblike τ_x za nek $x \in (0, 1)$, in še eden, ki ustreza točki ∞. V njem so vse tiste funkcije f, ki limitirajo proti 0, ko se približujejo 0 in 1.



Slika 1. Interval z eno točko kompaktificiramo v krožnico. Vsaka zožitev funkcije, definirane na krožnici, na krožnico brez točke mora imeti limito z obeh strani, in limiti se morata ujemati. Točka, ki jo dodamo, da dobimo kompakten prostor, je narisana z rdečo.

Na podoben način lahko razmišljamo tudi o kompaktifikaciji intervala z dvema točkama. Tu intervalu dodamo eno točko na vsaki strani – iščemo torej tiste funkcije, ki se jih da zvezno razširiti do funkcij na zaprtem intervalu. Podalgebro, ki določa to kompaktifikacijo, torej dobimo tako, da



Slika 2. Interval kompaktificiran z daljico in točko.

zvezne funkcije na zaprtem intervalu $[0,1]$ omejimo na odprt interval $(0,1)$. S tem dobimo natanko tiste $f \in \mathcal{C}^*((0,1))$, za katere obstajata $\lim_{x\to 0} f(x)$ in $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Odprt interval pa lahko kompaktificiramo tudi tako, da dodamo kakšno drugo množico. Preslikava $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}^2$ s predpisom $f(x) = (x, \sin\frac{1}{x})$ tako določa kompaktifikacijo z daljico in eno točko. Zaprtje slike preslikave f je namreč kompakten in Hausdorffov prostor.

Funkcije $\sin\frac{1}{x}$ ne moremo zvezno razširiti na krožnico ali pa na zaprt interval, saj $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ sploh ne obstaja. Lahko pa jo razširimo na prostor iz slike 2, saj komutira diagram

$$\begin{tikzcd}
(0,1) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\sin\frac{1}{x}"'] & & \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^2}(f((0,1))) \arrow[dl, "\pi_2"] \\
& {[0,1],} &
\end{tikzcd}$$

kjer je π_2 projekcija na drugo koordinato.

3.2.2 Stone-Čechova kompaktifikacija

Stone-Čechova kompaktifikacija poišče največji kompakten Hausdorffov prostor (glede na ureditev v izreku 14), v katerega se da gosto vložiti dan prostor Tihonova. Implicitno jo je uporabil Tihonov leta 1930, imenuje pa se po Marshallu H. Stoneu in Eduardu Čechu, ki sta jo eksplicitno podala leta 1937.

Posledica 21 (Stone-Čechova kompaktifikacija). *Naj bo X prostor Tihonova. Tedaj obstaja tak kompakten Hausdorffov prostor βX, ki vsebuje X kot gosto podmnožico, da se vsaka preslikava $f\colon X \to Y$, kjer je Y kompakten Hausdorffov prostor, enolično faktorizira skozi βX, tj. obstaja natanko ena preslikava $\beta f\colon \beta X \to Y$, da komutira diagram*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\beta f"] \\
& Y.
\end{tikzcd}$$

Dokaz. Vzemimo $P = \mathcal{C}^*(X)$ in naj bo $\beta X = \mathcal{M}(P)$. Ker je X prostor Tihonova in P loči točke, lahko na X gledamo kot na podprostor v βX, saj je po lemi 8 tedaj i_P homeomorfizem na svojo sliko. Če želimo, da zgornji diagram komutira, mora biti $\mathrm{Cl}_Y(f(X)) \subseteq \beta f(\beta X)$, torej mora komutirati diagram

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\beta f"] \\
& \mathrm{Cl}_Y(f(X)).
\end{tikzcd}$$

Prostor $\mathrm{Cl}_Y(f(X))$ je kot zaprt podprostor kompaktnega Hausdorffovega prostora tudi sam kompakten in Hausdorffov, in slika f je v njem gosta. Po glavnem izreku tedaj obstajata natanko en homeomorfizem $g\colon \mathrm{Cl}_Y(f(X)) \to \mathcal{M}(P_f)$ ter natanko en $\widetilde{\beta f}\colon \beta X \to \mathcal{M}(P_f)$, da komutira diagram

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "i_{P_f}"] & \beta X \arrow[d, "\widetilde{\beta f}"] \\
\mathrm{Cl}_Y(f(X)) \arrow[r, "g"] & \mathcal{M}(P_f).
\end{tikzcd}$$

Iskani βf je torej $g^{-1} \circ \widetilde{\beta f}$, in je enoličen po konstrukciji.

Maksimalne podalgebre v $\mathcal{C}^*(X)$ (glede na lastnost (1)) sovpadajo s točkami Stone-Čechove kompaktifikacije. Konstrukcijo lahko naredimo tudi v primeru, ko X ni prostor Tihonova, vendar takrat preslikava $X \to \beta X$ ni nujno vložitev; če algebra $\mathcal{C}^*(X)$ ne loči točk, se zgodi celo, da ni injektivna. Tudi če X ni prostor Tihonova, pa je βX maksimalni in zadnji element delno urejene množice $\mathcal{K}(X)/_\sim$.

Če za prostor Y izbiramo zaprte intervale, vidimo, da se da vsako funkcijo $f \in \mathcal{C}^*(X)$ enolično razširiti do funkcije $\beta f \in \mathcal{C}^*(\beta X)$. V nadaljevanju bomo pokazali, da je za obstoj Stone-Čechove kompaktifikacije zadosten obstoj take kompaktifikacije prostora X, na katero se da razširiti vsako omejeno zvezno funkcijo iz $\mathcal{C}^*(X)$.

Izrek 22. *Naj bo X prostor Tihonova. Tedaj obstaja kompaktifikacija $(\tilde{\beta}X, \alpha)$ prostora X, da za vsak $g \in \mathcal{C}^*(X)$ obstaja natanko ena funkcija $\tilde{g} \in \mathcal{C}^*(\tilde{\beta}X)$, za katero komutira diagram*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "g"'] & \tilde{\beta}X \arrow[d, "\tilde{g}"] \\ & \mathbb{R}. \end{tikzcd}$$

Očitno takšna kompaktifikacija obstaja po izreku o Stone-Čechovi kompaktifikaciji, ampak tukaj bomo naredili drugačno konstrukcijo, ki je morda bolj intuitivna kot zgornja, iz nje pa bo tudi iz te na videz šibkejše trditve sledil izrek 21. Spomnimo se kompaktifikacije odprtega intervala s točko in daljico. Prostor, ki smo ga tako dobili, je bil homeomorfen zaprtju slike preslikave $x \mapsto (x, \sin\frac{1}{x})$, funkcijo $\sin\frac{1}{x}$ pa se je dalo s pomočjo projekcije razširiti na to kompaktifikacijo. Če bi vzeli preslikavo $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$, bi se vse funkcije f_i razširile na zaprtje slike te preslikave s pomočjo ustreznih projekcij. To je tudi glavna ideja v dokazu tega izreka.

Dokaz. Ker je vsak zaprt interval homeomorfen $[0,1]$, lahko brez škode za splošnost dokažemo komutativnost diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "g"'] & \tilde{\beta}X \arrow[d, "\tilde{g}"] \\ & {[0,1]}, \end{tikzcd}$$

kjer je $g\colon X \to [0,1]$. Naj bo $\mathcal{C}_X = \{f \in \mathcal{C}^*(X) | f(X) \subseteq [0,1]\}$ množica vseh zveznih funkcij na X, ki zavzamejo vrednosti med 0 in 1. Za vsak $f \in \mathcal{C}_X$ naj bo $I_f = [0,1]$, in naj bo $\alpha\colon X \to \Pi_{f\in\mathcal{C}_X} I_f$ preslikava s predpisom $\alpha(x) = (f(x))_{f\in\mathcal{C}_X}$. Po izreku Tihonova je prostor $\Pi_{f\in\mathcal{C}_X} I_f$ kompakten in Hausdorffov. Preslikava α je zvezna, saj je $\pi_f \circ \alpha = f$, kjer je π_f projekcija na f-to komponento produkta. Ker je X prostor Tihonova, množica $\mathcal{C}_X$ loči točke, zato je α injektivna preslikava. Radi bi pokazali še, da je odprta kot preslikava na svojo sliko. Naj bo U neka odprta množica v X in $x \in U$. Ker je X prostor Tihonova, obstaja $f \in \mathcal{C}_X$, da je $f(x) = 0$ in $f(X \setminus U) = 1$. Množica $V = \pi_f^{-1}([0,1))$ je odprta okolica $\alpha(x)$. Naj bo $y \in X$ takšen, da je $\alpha(y) \in V$. Tedaj je $f(y) < 1$, zato $y \notin X \setminus U$, torej je $y \in U$ in $\alpha(y) \in \alpha(U)$. Za vsako točko $w \in \alpha(U)$ torej obstaja odprta okolica $V \subseteq \Pi_{f\in\mathcal{C}_X} I_f$ točke w, da je $V \cap \alpha(X) \subseteq \alpha(U)$, torej je $\alpha(U)$ odprta v $\alpha(X)$, in α je homeomorfizem na svojo sliko.

Naj bo $\beta X = \mathrm{Cl}_{\Pi_{f\in\mathcal{C}_X} I_f}(\alpha(X))$. Kot zaprt podprostor kompaktnega Hausdorffovega prostora je tudi $\tilde{\beta}X$ kompakten in Hausdorffov, in je kompaktifikacija prostora X. Funkcija g je element množice $\mathcal{C}_X$, zato je $\pi_g \circ \alpha = g$, torej diagram iz izreka komutira za $\tilde{g} = \pi_g$.

Ker je $\alpha(X)$ gosta v $\tilde{\beta}(X)$, prostor $[0,1]$ pa je Hausdorffov, je $\tilde{g}$ enolično določena.

Sedaj bi radi dokazali še, da kompaktifikacija βX iz pravkar dokazanega izreka zadošča tudi lastnosti iz posledice 21, kot smo z uporabo podobne notacije že nakazali.

Trditev 23. *Naj bo X prostor Tihonova in naj bo $(\beta X, \alpha)$ kompaktifikacija prostora X, ki zadošča lastnosti iz izreka 22. Tedaj za vsako zvezno preslikavo $g\colon X \to Y$, kjer je Y kompakten Hausdorffov* *topološki prostor, obstaja* $\tilde{g}\colon \tilde{\beta}X \to Y$, *da komutira diagram*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "g"'] & \tilde{\beta}X \arrow[d, "\tilde{g}"] \\ & Y. \end{tikzcd}$$

Dokaz. Y je prostor Tihonova, zato zanj obstaja kompaktifikacija $\tilde{\beta}Y$ kot v izreku 22, ker pa je prostor Y že sam po sebi kompakten, je Y homeomorfen $\tilde{\beta}Y \subseteq [0,1]^J$ za neko množico J. Dovolj je torej pokazati, da komutira

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "g"'] & \tilde{\beta}X \arrow[d, "\tilde{g}"] \\ & \tilde{\beta}Y, \end{tikzcd}$$

kjer na $\tilde{\beta}Y$ lahko gledamo kot na podprostor $[0,1]^J$. Funkcija g je tako oblike $\Pi_{j\in J}g_j$. Vsaka od njenih komponent je omejena zvezna funkcija z vrednostmi na intervalu $[0,1]$, in ker $\tilde{\beta}X$ ustreza izreku 22, lahko vsak g_j razširimo do $\tilde{g}_j\colon \tilde{\beta}X \to [0,1]$ tako, da velja $g_j = \tilde{g}_j \circ \alpha$. Definirajmo $\tilde{g}\colon \tilde{\beta}X \to \tilde{\beta}Y \subseteq [0,1]^J$ kot $\tilde{g}(x) = (\tilde{g}_j(x))_{j\in J}$. Potem je $\tilde{g}(\alpha(x)) = (\tilde{g}_j(\alpha(x)))_{j\in J} = (g_j(x))_{j\in J} = g(x)$, torej diagram komutira.

3.3 Stone-Weierstrassov izrek

Leta 1885 je Karl Weierstrass dokazal, da se da vsako zvezno funkcijo na zaprtem intervalu poljubno dobro aproksimirati s polinomi. Ta rezultat je zelo uporaben tako teoretično kot tudi praktično, saj so polinomi relativno enostavne in obvladljive funkcije. Leta 1937 pa je Marshall H. Stone posplošil izrek tako, da je zaprt interval nadomestil s kompaktnim Hausdorffovim prostorom, algebro polinomov pa z bolj splošno algebro zveznih funkcij, ki loči točke.

Posledica 24 (Stone-Weierstrassov izrek). *Naj bo X kompakten Hausdorffov prostor. Če je P zaprta podalgebra $\mathcal{C}(X)$, ki vsebuje enico in loči točke, potem je $P = \mathcal{C}(X)$.*

Dokaz. $i_P\colon X \to \mathcal{M}(P)$ je surjektivna, ker je njena slika kompaktna in gosta v kompaktnem Hausdorffovem prostoru. Ker P loči točke, je i_P tudi injektivna. Ker slika iz kompaktnega v Hausdorffov prostor, je zaprta, torej je homeomorfizem. Zato je $i_P^*\colon \mathcal{C}^*(\mathcal{M}(P)) \to \mathcal{C}^*(X)$ izomorfizem, katerega slika je enaka P. Tedaj je torej $P = \mathcal{C}^*(X)$.

Posledica 25 (Weierstrassov aproksimacijski izrek). *Vsako zvezno funkcijo na zaprtem intervalu lahko poljubno dobro aproksimiramo z nekim polinomom.*

Dokaz. Polinomi ločijo točke in vsebujejo konstantne funkcije, zato je njihovo zaprtje cela algebra $\mathcal{C}^*([a,b])$. Naj bo $f \in \mathcal{C}^*([a,b])$. Množica $K(f,\varepsilon) = \{g \in \mathcal{C}^*([a,b]) || f-g| < \varepsilon\}$ je odprta krogla z radijem ε okoli funkcije f, in zato seka množico vseh polinomov. Torej obstaja polinom $p \in K(f,\varepsilon)$.

3.4 Tietzejev razširitveni izrek

Leta 1915 je avstrijski matematik Heinrich Tietze dokazal razširitveni izrek za metrične prostore. V dokazu je uporabil dejstvo, da lahko v metričnem prostoru ločimo disjunktne zaprte množice s funkcijo razdalje. Deset let kasneje je Urysohn dokazal svojo lemo, ki pravi podobno za normalne prostore, in opazil, da lahko z njeno uporabo postloši Tietzejev izrek na normalne prostore.

Posledica 26 (Tietzejev razširitveni izrek). *Vsako realno zvezno funkcijo, definirano na zaprtem podprostoru normalnega topološkega prostora X, lahko razšitimo do zvezne realne funkcije na celem prostoru X.*

Dokaz. Oglejmo si najprej primer, ko je X kompakten. Naj bo $i\colon A \to X$ standardna inkluzija zaprte podmnožice $A \subseteq X$ v X. Pokazati želimo, da je $\mathcal{C}^*(A)$ enaka množici vseh zožitev funkcij v $\mathcal{C}^*(X)$ na množico A, torej $P = \{f \circ i | f \in \mathcal{C}^*(X)\} = \mathcal{C}^*(A)$. Ker algebra $\mathcal{C}^*(X)$ loči točke

(X je normalen), tudi algebra P loči točke prostora A. Po Stone-Weierstrassovem izreku je torej $\mathrm{Cl}_{\mathcal{C}^*(A)}(P) = \mathcal{C}^*(A)$. Dovolj je torej pokazati, da je P zaprta. Naj bo $f_n \circ i$ zaporedje funkcij v P, ki enakomerno konvergira k f. Poiskali bomo funkcijo $g \in \mathcal{C}^*(X)$, za katero je $g|_A = g \circ i = f$. Ker zaporedje $f_n|_A$ konvergira, lahko brez škode za splošnost velja $|f_n(a) - f_{n+1}(a)| < 2^{-n}$ za vse $a \in A$. Naj bo $r_n \colon \mathbb{R} \to [-2^{-n}, 2^{-n}]$ zaporedje funkcij s predpisom

$$r_n(x) = \begin{cases} -2^{-n}; & x \leq -2^{-n} \\ x; & -2^{-n} \leq x \leq 2^{-n} \\ 2^{-n}; & 2^{-n} \leq x \end{cases}$$

Zaporedje $g_n = f_1 + \sum_{k=1}^n r_k \circ (f_{k+1} - f_k)$ konvergira enakomerno k neki funkciji $g \in \mathcal{C}^*(X)$, saj je Cauchyjevo, $\mathcal{C}^*(X)$ pa je poln metrični prostor. Res, za $n < m$ si oglejmo $|g_n - g_m| = |\sum_{k=n}^m r_k \circ (f_{k+1} - f_k)| \leq \sum_{k_n}^m |r_k \circ (f_{k+1} - f_k)| \leq \sum_{k=n}^m 2^{-k} < 2^{-n+1}$, kar pa je poljubno majhno za dovolj velik n. Opazimo tudi, da je za $a \in A$ $g(a) = f(a)$.

Za dokaz splošnega primera si bomo pomagali s Stone-Čechovo kompaktifikacijo. Naj bosta $(\beta A, i_A)$ in $(\beta X, i_X)$ Stone-Čechovi kompaktifikaciji prostorov A in X. Najprej pokažimo, da je $i_* \colon \beta A \to \beta X$ injektivna. Izberimo $x, y \in \beta A$, in naj bosta C in D disjunktni zaprti okolici točk x in y. Takšni okolici obstajata, ker je prostor βA normalen. Naj bo $g \colon X \to [0,1]$ takšna funkcija, da je $g(i_A^{-1}(C)) = 0$ in $g(i_A^{-1}(D)) = 1$. Takšna funkcija obstaja, ker sta $i_A^{-1}(C)$ in $i_A^{-1}(D)$ zaprti podmnožici v A, ki je zaprta v X, torej sta zaprti tudi v normalnem prostoru X, in sta neprazni, ker imata neprazni notranjosti (saj sta okolici), ki sekata gosto množico $i_A(A)$. Za funkcijo g tedaj obstaja razširitev na funkcijo $g' \colon \beta X \to [0,1]$, in razširitev funkcije $g|_A$ na $g'' \colon \beta A \to [0,1]$. Dobimo komutativni diagram

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i"] \arrow[d, "i_A"'] \arrow[dr, "g|_A"] & & X \arrow[d, "i_X"] \arrow[dl, "g"'] \\
\beta A \arrow[r, "g''"'] & {[0,1]} & \beta X, \arrow[l, "g'"]
\end{tikzcd}$$

torej je $g' \circ i_X \circ i = g'' \circ i_A$. Po komutativnosti diagrama in izreka 4 vemo, da je $i_X \circ i = i_* \circ i_A$, torej imamo $g' \circ i_* \circ i_A = g'' \circ i_A$. Ker je $i_A(A)$ gosta v βA, se torej funkciji $g' \circ i_*$ in g'' ujemata na gosti podmnožici prostora βA, torej sta zaradi Hausdorffovosti prostora βA enaki. Funkcija g'' pa v točki x zavzame vrednost 0, saj je množica $i_A(i_A^{-1}(C))$ gosta v $C \subseteq \beta A$ in njeno zaprtje vsebuje x, na njej pa je funkcija g'' enaka 0, podobno je $g''(y) = 1$, torej mora biti i_* injektivna. Preslikava i_* je tudi zaprta, saj slika iz kompaktnega v Hausdorffov prostor.

Naj bo X sedaj normalen prostor, in naj bo $f \colon A \to \mathbb{R}$ omejena funkcija na zaprtem podprostoru $A \subseteq X$. Po izreku o Stone-Čechovi kompaktifikaciji lahko f razširimo do funkcije $\beta f \colon \beta A \to \mathbb{R}$. Po zgornjem razmisleku pa lahko na βA gledamo kot na zaprt podprostor βX, ki je kompakten, in po prvem delu dokaza lahko βf razširimo do $f' \colon \beta X \to \mathbb{R}$. Na X pa lahko gledamo kot na podprostor v βX, torej dobimo želeno razširitev funkcije f, če f' omejimo na X.

Če pa funkcija $f \colon A \to \mathbb{R}$ ni omejena, identificiramo $\mathbb{R}$ z intervalom $(-1,1)$. Funkcijo $\tilde{f}$ lahko razširimo do funkcije $\tilde{f}' \colon X \to [-1,1]$. Tako razširjene funkcije ne moremo identificirati s funkcijo v realna števila, saj $[-1,1]$ in $\mathbb{R}$ nista homeomorfna, zato jo še malo popravimo. Množici $g^{-1}(\{-1,1\})$ in A sta zaprti in disjunktni, zato obstaja funkcija $\alpha \colon X \to [0,1]$, za katero je $\alpha(g^{-1}(\{-1,1\})) = 0$ in $\alpha(A) = 1$. Funkcija $f' = \alpha \cdot \tilde{f}'$ tedaj razširja funkcijo $\tilde{f} \colon A \to (-1,1)$, in tudi sama slika v interval $(-1,1)$.

LITERATURA

[1] J. Dydak in N. Feldman, *Major Theorems on Compactness: a Unified Exposition*, Amer. Math. Monthly **99** (1992) 220–227.

[2] R. Engelking, *General Topology, Revised and completed ed.*, Sigma series in pure mathematics **6**, Heldermann Verlag Berlin, Berlin, 1989.

[3] J. Mrčun, *Topologija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **44**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2008.

[4] J. R. Munkres, *Topology, 2nd ed.*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, 2000.