IZOLACIJA NEGIBNIH TOČK PRESLIKAV NA KOMPAKTNEM POLIEDRU

ANDREJ BORŠTNIK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V tem delu obravnavam izolacijo negibnih točk preslikav na kompaktnem poliedru. Najprej si bomo ogledali, kaj so poliedri, in izpeljali lastnosti, ki jih bomo kasneje potrebovali. Na poliedrih definiramo simplicialne preslikave, ki jih bomo potrebovali za deformiranje preslikave.

Pokazali bomo, da je mogoče vsako preslikavo "malo" deformirati v simplicialno preslikavo, ki ima izolirane negibne točke. S tem bomo dokazali, da je mogoče izolirati negibne točke vsake preslikave na kompaktnem poliedru.

Da je preslikave mogoče "malo" deformirati v preslikave z izoliranimi negibnimi točkami, je topološka invarianta in zato velja tudi za vse prostore, ki so homeomorfni poliedrom.

ISOLATING FIXED POINTS OF MAPS ON COMPACT POLYHEDRA

This work considers the isolation of fixed points of maps on compact polyhedra. First we have a look at what polyhedra are and then we show a few properties we are going to need later. We also define simplicial maps which we will need for deforming the map.

We show that every map can be slightly modified into a simplicial map which has isolated fixed points. That proves it is possible to isolate fixed points of an arbitrary map on a compact polyhedron.

The property that all maps can be slightly modified to a map with isolated fixed points is a topological invariant and therefore transfers to all spaces homeomorphic to polyhedra.

1. Uvod

Negibne točke, predvsem pa izolacija negibnih točk preslikav je pomembna tema, ki jo obravnava topologija. *Negibna točka* preslikave $f : X \longrightarrow Y$ je vsaka točka $x \in X$, za katero velja $f(x) = x$. Seveda pa so rezultati, ki jih prispeva topologija uporabni tudi drugod. V analizi so na primer rešitve navadnih diferencialnih enačb negibne točke primernega funkcionala. Zelo znano je Banachovo skrčitveno načelo, ki pravi, da ima vsaka skrčitev v polnem, metričnem prostoru (vsaj eno) negibno točko. Znan rezultat teorije negibnih točk je tudi Brouwerjev izrek (spodaj).

Izrek 1. *Naj bo B^n enotska krogla in $f : B^n \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow B^n \subset \mathbb{R}^n$ (zvezna) preslikava. Tedaj ima f (vsaj eno) negibno točko.*

Dokaz. Glej [1]. □

Za študij prostora X v povezavi s preslikavo $f : X \longrightarrow X$ je ugodno, da so negibne točke f *izolirane*. Za vsako negibno točko x_0 preslikave f mora obstajati odprta okolica U v X, da noben $x \in U$, ki ni enak x_0, ni negibna točka preslikave f.

V tem delu je naš cilj pokazati, da lahko izoliramo negibne točke preslikave na kompaktnem poliedru. Natančneje: pokazati želimo, da lahko dano preslikavo f "malo" deformiramo in dobimo preslikavo g, ki ima izolirane negibne točke.

Opazimo: če ima zvezna preslikava $f : X \longrightarrow X$ končno mnogo negibnih točk, jih lahko izoliramo, ker lahko preprosto izberemo okolico vsake negibne točke, na primer odprto kroglo s polmerom $\min\{d(x_i, x_j)\}$ (kjer so x_i, x_j negibne točke preslikave). Ta krogla očitno ne vsebuje nobene druge negibne točke.

Če bi imela preslikava f neskončno mnogo negibnih točk, bi obstajala vsaj ena negibna točka, ki ne bi bila izolirana. To je res, saj je f je zvezna. Vemo, da ima vsako neskončno zaporedje v kompaktni množici stekališče (seveda v tej množici). Naj bo $\{x_i\}_i$ zaporedje negibnih točk preslikave f in naj bo x njegovo stekališče. Tedaj je tudi x negibna točka preslikave f, saj je

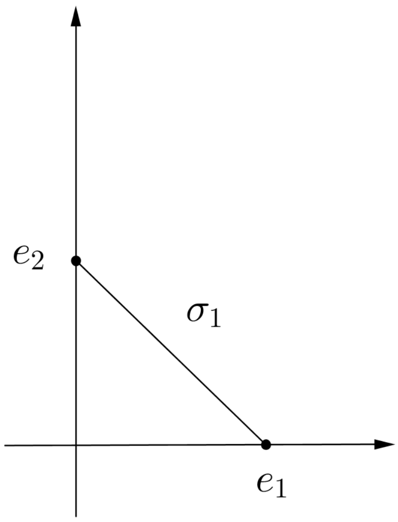
$$f(x) = f(\lim_{i\to\infty} x_i) = \lim_{i\to\infty} f(x_i) = \lim_{i\to\infty} x_i = x.$$

Ker ima negibna točka x v vsaki okolici vsaj eno negibno točko (saj je vendar stekališče), ni izolirana. Torej bi radi dosegli, da ima naša deformacija preslikave f končno število negibnih točk.

Z analizo poliedrov in preslikav med njimi bomo karakterizirali simplicialne preslikave, ki imajo izolirane negibne točke. Dokazane lastnosti bomo nato uporabili za dokaz ciljnega izreka o obstoju ϵ-deformacije.

2. Poliedri, njihove lastnosti in simplicialne preslikave

Definicija 1. Naj bo $\{e_i\}_{i\in\{1,\dots,n+1\}}$ standardna baza prostora $\mathbb{R}^{n+1}$. Potem je standardni *n-simpleks* σ_n množica vseh konveksnih kombinacij baznih vektorjev $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_i$, kjer so vsi $\lambda_i \geq 0$ in $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. To so ravno vektorji $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, kjer je vsota λ_i enaka 1 in so vsi λ_i nenegativni. Za primer glej sliko 1, kjer je upodobljen standardni 1-simpleks.



Slika 1. Standardni 1-simpleks v $\mathbb{R}^2$.

Prav tako vsaki podmnožici s evklidskega prostora $\mathbb{R}^N$ pravimo *n-simpleks*, če obstaja bijektivna afina preslikava $f : \sigma_n \longrightarrow s$.

To pomeni, da za vsak $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_i \in \sigma_n$ velja

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(e_i).$$

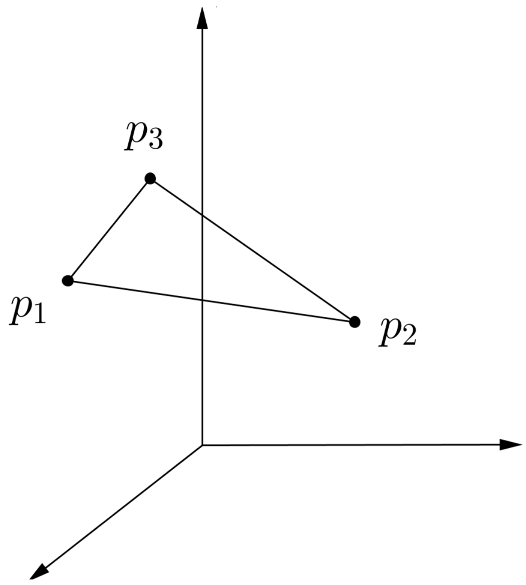
Pravimo, da je n *dimenzija* n-simpleksa s in pišemo $\dim(s) = n$.

Naj bo za vsak $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ točka p_i enaka $f(e_i)$. Točkam p_i pravimo *oglišča* n-simpleksa s. Ker je f afina funkcija, je simpleks s očitno konveksna ogrinjača oglišč $p_1, \ldots, p_{n+1}$. Pišemo $s = |p_1, \ldots, p_{n+1}|$. Naj bo $s = |p_1, \ldots, p_{n+1}|$ neki simpleks in naj bo $\{p_{j_1}, \ldots, p_{j_{k+1}}\}$ neprazna podmnožica oglišč, ki tvorijo simpleks. Očitno je tudi $s_j = |p_{j_1}, \ldots, p_{j_{k+1}}|$ simpleks (k-simpleks). Pravimo mu *lice* simpleksa s. Na sliki 2 vidimo 2-simpleks z oglišči p_1, p_2 ter p_3 v $\mathbb{R}^3$. Omenimo, da lice tvori konveksna ogrinjača vsake neprazne podmnožice oglišč simpleksa. Torej je vsak simpleks lice samega sebe.

Očitno je, da je 0-simpleks točka, 1-simpleks daljica, 2-simpleks trikotnik, 3-simpleks tetraeder in tako dalje, ki so po vrsti homeomorfni B^0, B^1, B^2, B^3.

Opomba 1. Ker so preslikave, ki porajajo simplekse, afine, so tudi homeomorfizmi in zato je vsak n-simpleks homeomorfen enotski krogli B^n. Iz (Brouwerjevega) izreka 1 torej sledi, da ima vsak homeomorfizem $h_s : s \longrightarrow s$ vsaj eno negibno točko.

Denimo, da obstaja h_s (kot zgoraj), ki nima negibnih točk. Tedaj jih nima tudi inverz h_s^{-1}. Res, če obstaja negibna točka preslikave h_s^{-1} x (torej je $h_s^{-1}(x) = x$), potem je tudi $h_s(h_s^{-1}(x)) = h_s(x)$, saj je h_s dobro definirana preslikava. Ker sta preslikavi inverzni je torej $h_s(x) = x$, oziroma h_s ima negibno točko, kar pa je v protislovju s predpostavko. Pokazali smo torej, da tudi h_s^{-1} nima negibnih točk.

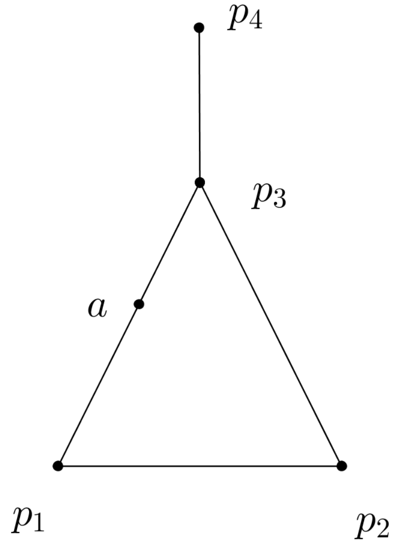


Slika 2. 2-simpleks, razpet med točkami p_1, p_2 in p_3 v $\mathbb{R}^3$.

Definicija 2. *Simplicialni kompleks* K je množica simpleksov v $\mathbb{R}^n$, za katere velja:

- Vsako lice vsakega simpleksa v K je tudi v K,
- za vsaka simpleksa $s, t \in K$ je $s \cap t$ lice tako s kot t (če je presek neprazen).

Simpleksu, ki ni lice nobenega drugega simpleksa v K, pravimo *maksimalni simpleks* simplicialnega kompleksa K. Ker vsako lice simpleksa (it K) leži v K, je za natančen opis K dovolj, da naštejemo maksimalne simplekse. Na sliki 3 sta maksimalna simpleksa upodobljenega simplicialnega kompleksa simpleksa $|p_1, p_2, p_3|$ in $|p_3, p_4|$.



Slika 3. Primer poliedra.

Definicija 3. Naj bo K simplicialni kompleks. Označimo s $|K|$ podmnožico evklidskega prostora, ki je sestavljena iz unije simpleksov $s \in K$. *Polieder* je par (X, K), kjer je X podmnožica evklidskega prostora s podedovano topologijo in je $X = |K|$ za neki končen K. Prostoru X pravimo realizacija poliedra.

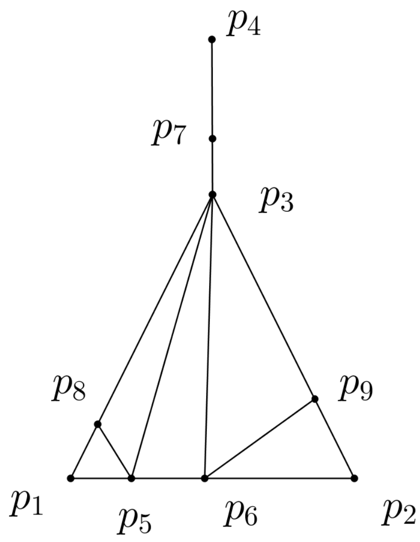
Primer 1. Poglejmo, kaj vse potrebujemo, da bo "simplicialni kompleks" K, ki ga predstavlja polieder na sliki 3, res simplicialni kompleks. Maksimalna simpleksa sta $s_1 = |p_1, p_2, p_3|$, ter $s_2 = |p_3, p_4|$, saj očitno nista lice nobenega drugega simpleksa. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da simpleks ni lice samega sebe, saj je že v kompleksu. Po definiciji morajo biti vključeni vsa lica in vsi preseki. Lica s_1 so $|p_1, p_2|, |p_2, p_3|, |p_1, p_3|, p_1, p_2$, ter p_3. Lici s_2 pa sta p_3 in p_4. Torej morajo biti vsi omenjeni simpleksi tudi v K. Poglejmo si še preseke simpleksov. Iz slike je očitno, da so edini preseki že prej omenjeni simpleksi. Na primer presek $|p_1, p_3|$ in $|p_2, p_3|$ je p_3, ki je lice obeh simpleksov. Podobno utemeljimo še vsebovanost vseh ostalih presekov. Torej je K, ki vsebuje zgoraj vse naštete simplekse, simplicialni kompleks.

Definicija 4. Simplicialni kompleks K' je subdivizija simplicialnega kompleksa K, če:

- za vsak simpleks $s' \in K'$ obstaja simpleks $s \in K$, da je $s' \subset s$,
- je $|K| = |K'|$.

Primer 2. Če dobro pogledamo sliko 4 (recimo upodobljenemu kompleksu K'), opazimo, da je subdivizija simplicialnega kompleksa s slike 3 (recimo mu K). Preverimo. Očitno, da je $|K'| = |K|$. Vsi simpleksi, ki so hkrati v K in K', očitno zadoščajo pogojem, saj je vsak podmnožica samega sebe. Preverimo še ostale. Simpleksi $|p_1, p_8, p_5|$, $|p_8, p_3, p_5|$, $|p_6, p_3, p_5|$, $|p_6, p_3, p_9|$, $|p_6, p_9, p_2|$, $|p_1, p_8|$, $|p_3, p_8|$, in tako dalje so podmnožica simpleksa $|p_1, p_3, p_2|$. Simpleksa $|p_4, p_7|$ in $|p_7, p_3|$ pa sta podmnožici simpleksa $|p_3, p_4|$. Torej je K' res subdivizija K.

Definicija 5. Naj bosta (X, K) in (Y, L) poliedra. *Simplicialna preslikava* $\phi : (X, K) \longrightarrow (Y, L)$ je na simpleksih afina preslikava iz X v Y, ki vsak simpleks $s \in K$ surjektivno preslika v nek simpleks



Slika 4. Subdivizija poliedra s slike 3.

$l \in L$. Pri tem gledamo na oglišča kot na 0-simpleks, zato preslikava ϕ preslika oglišča v oglišča, kar natančno določa ϕ (saj mora biti afina na simpleksih).

Definicija 6. Naj bo polieder (X, K') subdivizija poliedra (X, K) in naj bo $\phi : (X, K') \longrightarrow (X, K)$ simplicialna preslikava. Simpleks $s' \in K'$ je *negiben simpleks* preslikave ϕ, če je $s' \subset \phi(s')$ (ki je simpleks v K).

Primer 3. Definirajmo preslikavo ϕ iz poliedra na sliki 4 v polieder na sliki 3 takole. Naj bo $\phi(p_8) = \phi(p_1) = p_1$, $\phi(p_5) = \phi(p_2) = \phi(p_6) = p_2$, $\phi(p_3) = \phi(p_9) = p_3$ in $\phi(p_7) = \phi(p_4) = p_4$. Preslikavo nato afino razširimo, preveriti pa je treba dobro definiranost (torej, da se simpleksi slikajo v simplekse). Na primer simpleks $|p_1, p_8, p_5|$ se preslika v simpleks $|p_1, p_2|$. Zgornja preslikava očitno ni injektivna.

Preslikava ϕ ima tudi negibne simplekse. Negibna sta simpleksa $|p_3, p_5, p_8|$ in $|p_3, p_7|$, prav tako pa so negibni simpleksi tudi oglišča p_1, p_2, p_3 in p_4.

Ni pa vsaka simplicialna preslikava surjektivna, saj lahko cel prostor preslikamo v eno samo oglišče (ta mora seveda obstajati).

Definicija 7. Naj bosta (X, K) in (X, K') poliedra, kjer je K' subdivizija K. Simpleksu $s' \in K'$ pravimo *napenjajoč simpleks* (glede na K), če lahko s' za neki naravni števili q in r zapišemo kot

$$s' = |a'_1, \ldots, a'_{q+1}, b'_1, \ldots, b'_{r+1}|,$$

kjer obstajata q-simpleks $s \in K$ in r-simpleks $t \in K$, da je $|a'_1, \ldots, a'_{q+1}| \subset s$ in $|b'_1, \ldots, b'_{r+1}| \subset t$.

Primer 4. Oglejmo si simplicialni kompleks K na sliki 4. Simpleks $s = |p_3, p_5, p_6|$ je napenjajoč simpleks glede na K, saj je p_3 oglišče v K in simpleks $|p_5, p_6|$ leži v simpleksu $|p_1, p_2|$, ki je simpleks v K iste dimenzije kot $|p_5, p_6|$.

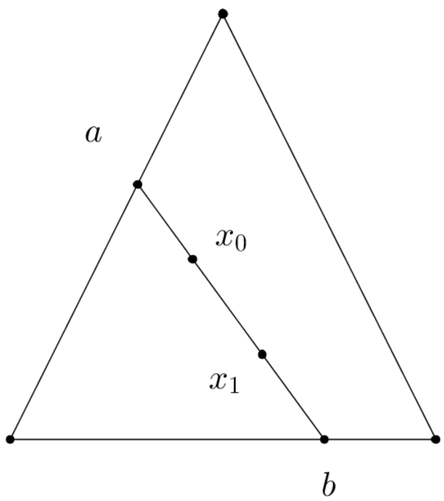
Definicija 8. *Rob* simpleksa s je sestavljen iz vseh lic, ki imajo dimenzijo za 1 manjšo od dimenzije simpleksa s. Izjema je točka, ki je sama svoj rob.

Lema 2. *Naj bosta (X, K), (X, K') poliedra, kjer je K' subdivizija K in naj bo $\phi : (X, K') \longrightarrow (X, K)$ simplicialna preslikava. Če obstaja simpleks $s' \in K'$, ki ima (vsaj) dve negibni točki ϕ, potem obstajata točki a in b, ki ležita na robu s' in je vsaka točka, ki leži med njima, negibna točka ϕ.*

Dokaz. Naj bosta $x_0, x_1 \in s'$ različni negibni točki preslikave ϕ. Oglejmo si vse točke x, ki ležijo na premici skozi x_0 in x_1 v s'. Ker je ϕ afina preslikava na vsakem simpleksu K' sledi, da za vsak tak x kot zgoraj velja:

$$\phi(x) = \phi(\tau x_0 + (1-\tau)x_1) = \tau\phi(x_0) + (1-\tau)\phi(x_1) = \tau x_0 + (1-\tau)x_1 = x.$$

To pomeni, da je vsak tak x negibna točka simplicialne preslikave ϕ. Množica vseh takih točk je daljica $[a, b]$, kjer sta a in b vsebovana v pravih licih s' (natančneje na robu). □



Slika 5. Če sta x_0 in x_1 negibni točki, potem so negibne vse točke na daljici $[a, b]$.

Izrek 3. *Naj bosta (X, K) ter (X, K') poliedra, kjer je K' subdivizija K in naj bo $\phi : (X, K') \longrightarrow (X, K)$ simplicialna preslikava. Če K' nima napenjajočih simpleksov (glede na K), potem vsak simpleks K' vsebuje največ eno negibno točko preslikave ϕ.*

Skica dokaza. Pa denimo, da obstaja simpleks $s' \in K'$, ki vsebuje (vsaj) dve negibni točki preslikave ϕ. Ogledamo si vsa lica s', ki imajo enako lastnost. Ker so simpleksi končni obstaja lice s, ki vsebuje negibni točki x_0 ter x_1 preslikave ϕ, vsako pravo lice s pa vsebujejo največ eno negibno točko.

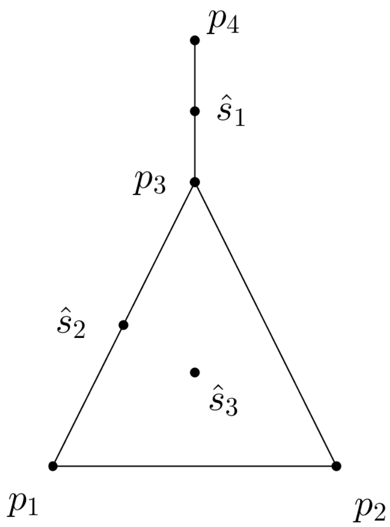
Iz lastnosti simplicialnih kompleksov sledi, da smo v protislovju, ali pa sta obe negibni točki na enem simpleksu. Slednje je v protislovju z našo predpostavko. Torej vsak simpleks K' vsebuje največ eno negibno točko. Za cel dokaz glej [2]. □

Posledica 4. *Vemo, da je poljuben polieder (X, K) sestavljen iz končno mnogo simpleksov. Če subdivizija K, K' nima napenjajočih simpleksov, ima vsaka simplicialna preslikava $f : (X, K') \longrightarrow (X, K)$ končno število negibnih točk.*

Dokaz. Očitno sledi iz izreka 3. □

3. Izolacija negibnih točk

Definicija 9. Naj bo $I = [0,1]$. *Homotopija* H preslikav $f, g : X \longrightarrow Y$ je zvezna preslikava $H : X \times I \longrightarrow Y$, za katero velja: $H(x,0) = f(x)$ in $H(x,1) = g(x)$ za vsak $x \in X$. Če taka homotopija obstaja pravimo, da sta preslikavi f in g *homotopni.*



Slika 6. Točke $\hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3$ so po vrsti težišča simpleksov $|p_3, p_4|$, $|p_1, p_3|$ in $|p_1, p_2, p_3|$.

Definicija 10. *Težišče (tudi baricenter)* n-simpleksa $s = |p_1, \ldots, p_{n+1}|$ $(n \in \mathbb{N})$ je točka

$$\hat{s} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} p_i.$$

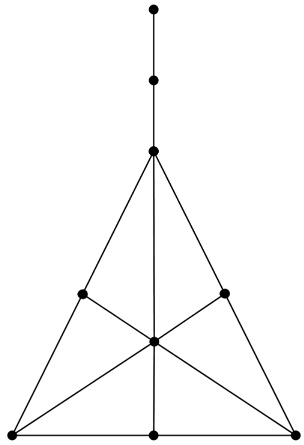
Težiščna subdivizija simplicialnega kompleksa K, $\mathrm{sd}(K)$, je simplicialni kompleks, katerega oglišča so težišča simpleksov K, simpleksi pa so oblike $|\hat{s}_1, \hat{s}_2, \ldots, \hat{s}_{q+1}|$, kjer je s_i lice s_j za $i < j$.

Trditev 5. *Naj bo (X, K) polieder. Potem simplicialni kompleks $\mathrm{sd}(K)$ nima napenjajočih simpleksov glede na K.*

Skica dokaza. Naj bo $s' = |\hat{s}_1, \hat{s}_2, \ldots, \hat{s}_{q+1}|$, kjer je s_i lice s_j za $i < j$, simpleks v $\mathrm{sd}(K)$. Potem iz definicije težišča sledi, da je $\hat{s}_{q+1}$ v notranjosti simpleksa s_{q+1} kompleksa K. Na sliki 7 zlahka vidimo, da noben simpleks ni napenjajoč. To se da tudi formalno preveriti, vendar bi morali pogledati globlje v teorijo. Za cel dokaz glej [2]. □

Ker je $\mathrm{sd}(K)$ tudi simplicialni kompleks (če je K simplicialni kompleks), lahko na njem spet uporabimo operator sd. Dobimo $\mathrm{sd}(\mathrm{sd}(K))$, kar označimo s $\mathrm{sd}^2(K)$. Podobno za poljuben $r \in \mathbb{N}$ definiramo $\mathrm{sd}^r(K) = \mathrm{sd}(\mathrm{sd}^{r-1}(K))$. Privzamemo, da je $\mathrm{sd}^0(K) = K$. Iz prejšnje trditve 5 sledi, da $\mathrm{sd}^r(K)$ nima napenjajočih simpleksov glede na $\mathrm{sd}^{r-1}(K)$, torej jih nima tudi glede na K. Iz trditve 5, izreka 3 in dejstva, da so negibne točke preslikave izolirane, če jih je končno mnogo, sledi naslednje.

Posledica 6. *Naj bo (X, K) polieder in naj bo $r \in \mathbb{N}$. Če je $\phi : (X, \mathrm{sd}^r(K)) \longrightarrow (X, K)$ simplicialna preslikava, potem so vse negibne točke ϕ izolirane.*



Slika 7. Težiščna subdivizija poliedra z slike 6.

Dokaz. Ker je $\mathrm{sd}^r(K)$ za $r \in \mathbb{N}$ težiščna subdivizija simplicialnega kompleksa $\mathrm{sd}^{r-1}(K)$ iz trditve 5 sledi, da $\mathrm{sd}^r(K)$ nima napenjajočih simpleksov glede na $\mathrm{sd}^{r-1}(K)$. Zato nima napenjajočih simpleksov v K. Iz izreka 3 sledi, da je negibnih točk kvečjemu toliko, kot je simpleksov, teh pa je končno mnogo. Ker so negibne točke preslikave izolirane, če jih je končno mnogo, sledi željeno. □

Težiščna subdivizija ima lepo lastnost, da ima vsaka preslikava f iz $\mathrm{sd}(K)$ v K v vsakem simpleksu kvečjemu eno negibno točko. Ideja konstrukcije aproksimacije je, da sd uporabimo na K tolikokrat, da bodo simpleksi dovolj majhni in s tem bosta preslikavi dovolj blizu.

Definicija 11. *Premer* (ang. diameter) simpleksa s, $\mathrm{diam}(s) = \max_{x,y\in s}\{d(x,y)\}$.

Lema 7. *Naj bo s m-simpleks simplicialnega kompleksa K, ki določa polieder (X, K). Naj bo s' m-simpleks simplicialnega kompleksa $\mathrm{sd}(K)$, ki določa polieder $(X, \mathrm{sd}(K))$, ter naj bo $s' \subset s$. Potem velja naslednje:*

$$\mathrm{diam}(s') \leq \frac{m}{m+1}\,\mathrm{diam}(s).$$

Dokaz. Dokaz prepustimo za vajo bralcu. Namig: simpleksi so konveksni in vsaka točka je konveksna kombinacija oglišč. Za več glej [2]. □

Definicija 12. *Finost* simplicialnega kompleksa K, $\mathrm{mesh}(K) = \max_{s\in K}\{\mathrm{diam}(s)\}$. *Dimenzija* simplicialnega kompleksa $\dim(K)$ je maksimum dimenzij simpleksov K.

Posledica 8. *Če uporabimo lemo 7 na simplicialnem kompleksu K, katerega dimenzija je n, sledi*

$$\mathrm{mesh}(\mathrm{sd}(K)) \leq \frac{n}{n+1}\,\mathrm{mesh}(K).$$

Če večkrat iteriramno sd *torej poljubno zmanjšamo premer simplicialnega kompleksa K.*

Posledica torej pove, da lahko $\mathrm{mesh}(\mathrm{sd}^r(K))$ poljubno zmanjšamo, tako da povečamo r. Pokažimo sedaj, da je mogoče poljubno preslikavo $f : (X, K) \longrightarrow (Y, L)$ aproksimirati s simplicialno preslikavo $\phi : (X, \mathrm{sd}^r(K)) \longrightarrow (Y, L)$ za neki $r \in \mathbb{N}_0$, da sta dobljeni preslikavi f in ϕ homotopni ter da ima ϕ izolirane negibne točke.

Izrek 9. *Naj bo $f : (X, K) \to (Y, L)$ preslikava med poliedroma. Potem ima f simplicialno aproksimacijo $\phi : (X, \mathrm{sd}^r(K)) \to (Y, L)$ za neki $r \in \mathbb{N}_0$.*

Dokaz. Dokaza te trditve ne bomo navedli, omenimo le naslednje. Preslikavo se da skonstruirati tako, da sta preslikavi poljubno blizu (s tem, da povečamo r). Za dokaz glej [2]. $\square$

Opomba 2. Pomembna lastnost težiščne subdivizije je, da lahko z njenim ponavljanjem poljubno zmanjšamo finost našega simplicialnega kompleksa K. Če K ne vsebuje napenjajočih simpleksov finosti K ni treba zelo zmanjšati.

Definicija 13. Naj bosta $f, g : X \longrightarrow Y$ preslikavi (Y mora biti metrični prostor) in $\epsilon > 0$. Kot običajno pišemo $d(f, g) < \epsilon$, če za vsak $x \in X$ velja $d(f(x), g(x)) < \epsilon$. Homotopija $H : X \times I \longrightarrow Y$ med f in g je *ϵ-homotopija*, če je za vsaka $t, t' \in I$ razdalja $d(h_t, h_{t'})$ manjša od ϵ.

Definicija 14. Metrični prostor X ima *epsilon izolacijsko lastnost*, če za vsako preslikavo $f : X \longrightarrow X$ in vsak $\epsilon > 0$ obstaja ϵ-homotopija $H : X \times I \longrightarrow X$, tako da je $H(x, 0) = f(x)$, ter da ima preslikava $g(x) = H(x, 1)$ izolirane negibne točke.

Izrek 10. *Poliedri imajo epsilon izolacijsko lastnost.*

Skica dokaza. Naj bo (X, K) polieder, $f : X \longrightarrow X$ preslikava in $\epsilon > 0$. Izberemo $r \in \mathbb{N}$, tako da je $\mathrm{mesh}(\mathrm{sd}^r(K)) < \epsilon$. Iz izreka 9 vemo, da obstaja $k \in \mathbb{N}$ in simplicialna aproksimacija f: $\phi : (X, \mathrm{sd}^k(K)) \longrightarrow (X, \mathrm{sd}^r(K))$. Kot smo opazili v izreku 9 lahko k poljubno povečamo, da bo $k > r$. Iz posledice 4 sledi, da ima ϕ izolirane negibne točke. Pokazati se da, da sta preslikavi f in ϕ sta homotopni. Ta homotopija je tudi ϵ-homotopija. Za razširjen dokaz glej [2]. $\square$

Izrek 11. *Epsilon izolacijska lastnost je topološka invarianta kompaktnih metričnih prostorov. Torej, če ima kompakten, metrični prostor X epsilon izolacijsko lastnost in je Y homeomorfen X, potem ima tudi Y epsilon izolacijsko lastnost.*

Dokaz. Naj bosta X in Y kompaktna metrična prostora, naj ima X epsilon izolacijsko lastnost ina naj bo $h : X \longrightarrow Y$ homeomorfizem. Naj bo $f : Y \longrightarrow Y$ preslikava in $\epsilon > 0$. Ker je X kompakten, je homeomorfizem h enakomerno zvezen. Zato obstaja tako število $\delta > 0$, da je za $x, x' \in X$, za katera velja $d(x, x') < \delta$, $d(h(x), h(x')) < \epsilon$. Definiramo $g : X \longrightarrow X$ kot $g = h^{-1} f h$. Ker ima X epsilon izolacijsko lastnost, lahko uporabimo kar $\epsilon = \delta$ in dobimo naslednje. Obstaja taka δ-homotopija $G = \{g_t\}_{t \in I} : X \times I \longrightarrow X$, da je $g_0 = g$ in ima g_1 ima izolirane negibne točke. Definirajmo homotopijo $F = \{f_t\}_{t \in I} : Y \times I \longrightarrow Y$, kjer je $f_t = h g_t h^{-1}$.

Naj bo $y \in Y$ in naj bosta $t, t' \in I$. Ker je G δ-homotopija, velja

$$d(g_t(h^{-1}(y)), g_{t'}(h^{-1}(y))) < \delta$$

in zato zaradi izbire δ

$$\begin{aligned} d(h(g_t(h^{-1}(y))), h(g_{t'}(h^{-1}(y)))) &= d(h g_t h^{-1}(y), h g_{t'} h^{-1}(y)) \\ &= d(f_t(y), f_{t'}(y)) < \epsilon. \end{aligned}$$

Zato je F ϵ-homotopija in

$$f_0 = h g_o h^{-1} = h g h^{-1} = f.$$

Naj bo y negibna točka f_1. Torej je

$$f_1(h(h^{-1}(y))) = y$$

in

$$g_1(h^{-1}(y)) = h^{-1}f_1h(h^{-1}(y)) = h^{-1}(y).$$

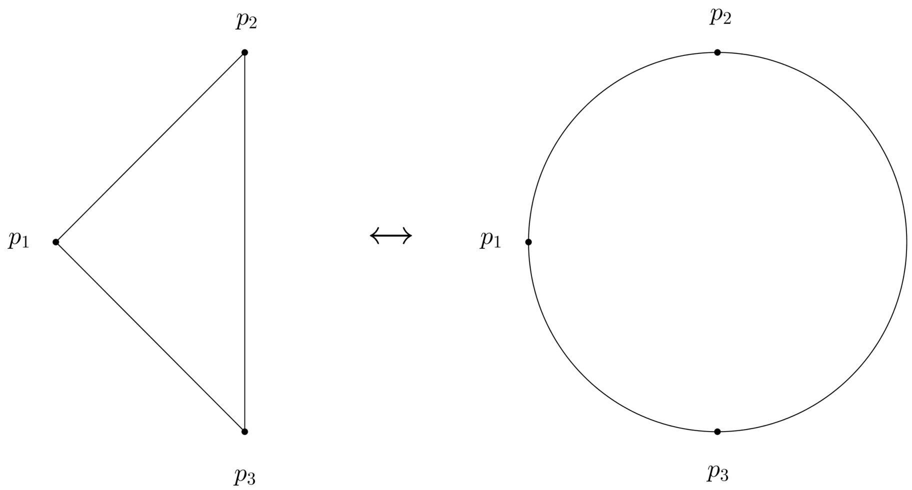
To pomeni, da je $h^{-1}(y)$ negibna točka g_1, ker pa ima končno mnogo negibnih točk ima tudi f_1 končno mnogo negibnih točk. Torej so negibne točke f_1 izolirane (kot smo že večkrat ugotovili). Torej ima tudi Y epsilon izolacijsko lastnost. □

Posledica 12. *Vsak prostor, homeomorfen poliedru, ima epsilon izolacijsko lastnost.*

Dokaz. Očitno sledi iz izreka 11. □

Opomba 3. Enotska krogla B^n je homeomorfna poliedru z enim maksimalnim simpleksom dimenzije n . Po posledici 12 ima krogla B^n epsilon izolacijsko lastnost.

Za polieder (X, K) s maksimalnimi simpleksi $|p_1, p_2|$, $|p_2, p_3|$ in $|p_1, p_3|$ je X homeomorfen krožnici (glej sliko 8) in ima zato tudi epsilon izolacijsko lastnost.
Podobno lahko sklepamo za veliko objektov/podmnožic evklidskih prostorov.



Slika 8. Trije povezani 1-simpleksi so homeomorfni krožnici.

LITERATURA

[1] J. Milnor, *Analytic proof of the "hairy ball theorem"and the Brouwer fixed point theorem*, Amer Math. Monthly **85** (1978), 521-524.

[2] A. Borštnik, *Izolacija negibnih točk preslikav na kompaktnem poliedru*, Diplomsko delo, Ljubljana, Fakulteta za matematiko in fiziko, Matematika (2014).

[3] Robert F. Brown, Jack E. Girolo, *Isolating fixed points*, Amer. Math. Monthly **109** (2002), no. 7, 595-611.

[4] S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press, 1952, 234.