GRAFI MYCIELSKEGA IN NJIHOV KROMATIČNI INDEKS

ALJAŽ BOŽIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Grafi Mycielskega so posebna družina grafov, za katero velja več zanimivih lastnosti. Poljuben enostaven graf lahko razširimo tako, da iz njega konstruiramo graf Mycielskega, ki začetni graf vsebuje kot podgraf. V članku se bomo osredotočili na barvanje povezav grafov Mycielskega in bomo dokazali, da glede na kromatični indeks vsi grafi iz te družine pripadajo razredu 1, razen graf Mycielskega polnega grafa K_2. Pokazali bomo tudi, da s konstrukcijo Mycielskega iz nekega začetnega grafa dobimo graf, ki ima kromatično število za ena večje kot začetni graf, in če začetni graf ne vsebuje nobenih trikotnikov, jih tudi graf Mycielskega ne vsebuje.

MYCIELSKI GRAPHS AND THEIR EDGE CHROMATIC NUMBER

Mycielski graphs are a special family of graphs with several interesting properties. Any simple graph can be expanded and transformed into a Mycielski graph, which contains the initial graph as a subgraph. In this article, we will focus on the edge coloring of Mycielski graphs and we will prove that regarding the edge chromatic number, every Mycielski graph belongs to Class 1, except the Mycielski graph of complete graph K_2. We will also show that with the Mycielski's construction on an initial graph we obtain a Mycielski graph whose chromatic number is one greater than the chromatic number of the initial graph. And if the initial graph is triangle-free, its Mycielski graph is also triangle-free.

1. Uvod

Grafi so matematične strukture, ki nam omogočajo reševanje najrazličnejših problemov. Ti problemi, kot bomo kmalu videli, niso omejeni samo na področja matematike, ampak grafe za predstavitev in reševanje problemov uporabljajo tudi v različnih drugih znanostih, npr. v računalništvu, fiziki, kemiji, biologiji, in še bi lahko naštevali.

Vsak graf sestavlja množica vozlišč in množica povezav. Množica povezav nam pove, katera vozlišča iz množice vozlišč so med sabo povezana. Ponavadi grafe predstavimo s sliko, na kateri so vozlišča predstavljena s točkami v ravnini, povezave med vozlišči pa so predstavljene s krivuljami, ki povezujejo med sabo povezana vozlišča. Torej, če sta dve vozlišči povezani, narišemo krivuljo, ki se začne v enem vozlišču in konča v drugem vozlišču.

Kaj pomeni, da sta dve vozlišči med sabo povezani? To je odvisno od konkretnega problema. Če imamo npr. podan zemljevid neke države, kjer so narisana določena mesta in prometne povezave med njimi, in želimo obiskati vsa mesta po najkrajši možni poti, lahko naš zemljevid predstavimo z grafom tako, da mesta na zemljevidu postanejo vozlišča v grafu, dve vozlišči pa sta povezani, če obstaja prometna povezava med mesti, ki ju vozlišči predstavljata. Ko imamo zemljevid podan z grafom, lahko najkrajšo pot skozi vsa mesta poiščemo z metodami, ki za dani graf poiščejo najkrajšo pot skozi vsa vozlišča v grafu.

Matematična veda, ki se ukvarja z raziskovanjem grafov, je teorija grafov. V današnjem času je njena uporaba zelo razširjena in rezultati, do katerih so v teoriji grafov skozi zgodovino prišli matematiki, ki so preučevali različne družine grafov, se uporabljajo na veliko različnih področjih, v zadnjem času med drugim tudi pri raziskovanju socialnih omrežij. Številni rezultati sprva pogosto niso bili prepoznani kot posebej uporabni, toda velikokrat se je zgodilo, da se je njihova uporabna vrednost razkrila šele kasneje, ko so te rezultate uporabili na drugih področjih.

Grafi Mycielskega, ki jih bomo preučevali v članku, so posebna družina grafov. Glavni izrek članka pove zanimivo lastnost, ki se tiče barvanja povezav v grafih Mycielskega (kaj barvanje povezav pomeni, bomo definirali v naslednjem razdelku). Izrek izvira iz leta 2010, grafi Mycielskega pa obstajajo že od leta 1955, ko jih je konstruiral Jan Mycielski (sledi iz [6]). Razlog, da je do njihove konstrukcije sploh prišlo, ni bil vezan na barvanje povezav, ampak na barvanje vozlišč v grafih Mycielskega, saj se je izkazalo, da za barvanje vozlišč prav tako velja pomembna lastnost. To lastnost bomo kot zanimivost spoznali takoj po opisu konstrukcije grafov Mycielskega.

Za razumevanje grafov Mycielskega je treba najprej poznati osnovne definicije in lastnosti grafov. Zato bomo v naslednjem razdelku spoznali pomembne pojme in rezultate iz teorije grafov, ki jih bomo potrebovali pri konstrukciji grafov Mycielskega ter pri obravnavi nekaterih njihovih lastnosti. V 3. razdelku se bomo lotili konstrukcije grafov Mycielskega, torej bomo povedali, kaj grafi Mycielskega sploh so. Omenili bomo tudi znano lastnost grafov Mycielskega, ki se navezuje na barvanje vozlišč in je pravzaprav razlog, da danes poznamo grafe Mycielskega. Nato bomo v 4. razdelku formulirali glavni izrek članka, ki bo vse grafe Mycielskega uvrstil v poseben razred grafov. Ta izrek bomo dokazali po korakih, pri čemer se bomo sklicali na številne lastnosti grafov, ki so opisane v naslednjem razdelku.

V članku bo več izrekov in trditev podanih brez dokazov. Večino dokazov si je možno ogledati v [1], za redke izjeme pa bo posebej omenjeno, v katerem viru si je možno ogledati dokaz.

2. Osnovno o grafih

V tem razdelku bomo o grafih izvedeli vse, kar bomo kasneje pri obravnavi grafov Mycielskega potrebovali. Najprej bomo navedli nekaj osnovnih definicij in lastnosti grafov, nato bomo našteli in opisali najpomembnejše družine grafov, na koncu pa bomo spoznali še barvanje grafov ter prirejanja in pokritja v grafih.

Vse definicije in izreki, ki jih bomo podali v tem razdelku, so povzeti po [1, 4, 5]. Ker pri opisu grafov Mycielskega vseh osnovnih pojmov teorije grafov ne bomo potrebovali, jih v članku v celoti ne bomo obdelali. Temeljit uvod v teorijo grafov najdemo v [4].

2.1 Osnovne definicije in lastnosti grafov

Kaj graf je, smo povedali že v uvodnem razdelku. Toda takrat smo definicijo grafa opisali čim bolj preprosto, zato bomo sedaj podali še striktno definicijo grafa.

Definicija 1. *Graf* G je urejen par $(V(G), E(G))$, pri čemer je $V(G)$ *množica vozlišč* in $E(G)$ *množica povezav*, ki vsebuje nekatere neurejene pare vozlišč. Vozlišči $u, v \in V(G)$ sta *povezani* oziroma *sosednji*, če je $\{u, v\} \in E(G)$. Oznaka: $u \sim v$.

Opomba 1. Podana definicija v resnici opisuje *enostavne neusmerjene grafe*. To so grafi, pri katerih so povezave *neusmerjene*, kar pomeni, da povezava v_1v_2 poteka od vozlišča v_1 do vozlišča v_2 in tudi v obratni smeri (torej je povezava v_1v_2 v množici povezav predstavljena z množico $\{v_1, v_2\}$, ne pa z urejenim parom (v_1, v_2)). Hkrati pa ti grafi ne vsebujejo *večkratnih povezav* (npr. večkrat podana povezava v_1v_2) in *zank* (npr. povezava v_1v_1). V teoriji grafov so razširjeni tudi *usmerjeni grafi*, ki vsebujejo usmerjene povezave, *multigrafi*, ki vsebujejo večkratne povezave, in *psevdografi*, ki poleg večkratnih povezav vsebujejo tudi zanke. Ker pa se v članku z njimi ne bomo ukvarjali, jih ne bomo posebej obravnavali. Ko bomo v nadaljevanju uporabljali izraz graf, bomo z njim mislili enostaven neusmerjen graf. Vsako povezavo $\{u, v\}$ bomo na kratko označili z uv.

Pomemben pojem pri grafih je *stopnja vozlišča*. Za vozlišče $v \in V(G)$ je *stopnja vozlišča* $d(v)$ enaka številu povezav s krajiščem v vozlišču v. Pri vsakem grafu G glede na stopnjo vozlišč definiramo tudi naslednja pojma:

- *maksimalno stopnjo grafa G:*

$$\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V(G)\};$$

- *minimalno stopnjo grafa G:*

$$\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V(G)\}.$$

Ker bomo kasneje ta tip grafov omenjali, definirajmo, kaj so to *regularni grafi*.

Definicija 2. Graf G je *regularen*, če so vse stopnje vozlišč v grafu G enake. Graf G je *k-regularen*, če so vse stopnje vozlišč v grafu G enake k.

Če imamo podan graf G, lahko iz njega tvorimo nove grafe tako, da v novem grafu upoštevamo samo določena vozlišča ali pa samo določene povezave originalnega grafa.

Definicija 3. Naj bo G graf. Graf H je *podgraf* grafa G, če je $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$. Ločimo dve posebni vrsti podgrafov:

(i) H je *vpet podgraf* grafa G, če je $V(H) = V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$;

(ii) H je *induciran podgraf* grafa G, če je $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) = \{uv \in E(G) : u, v \in V(G)\}$.

Pri grafih poleg podgrafov včasih opazujemo tudi *komplementarne grafe*.

Definicija 4. *Komplementarni graf* $\bar{G}$ grafa G je graf z množico vozlišč $V(\bar{G}) = V(G)$ in množico povezav $E(\bar{G}) = \{uv : u, v \in V(G), uv \notin E(G)\}$.

Grafi so lahko *povezani* ali *nepovezani*. Preden lahko definiramo, kaj *povezanost grafa* pomeni, moramo najprej definirati, kaj sta *sprehod* in *pot* v grafu.

Definicija 5. *Sprehod* v grafu G je zaporedje vozlišč $v_1, \ldots, v_k$, pri čemer je $v_i \in V(G)$ za $i = 1, \ldots, k$ in $v_j \sim v_{j+1}$ za $j = 1, \ldots, k-1$. Ločimo tri posebne vrste sprehodov:

(i) sprehod je *enostaven*, če so vse povezave $v_j v_{j+1}$ za $j = 1, 2, \ldots, k-1$ različne;

(ii) sprehod je *pot*, če so vsa vozlišča $v_1, v_2, \ldots, v_k$ različna;

(iii) sprehod je *cikel*, če so vsa vozlišča $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ različna in je $v_1 = v_k$.

Dolžina sprehoda $v_1, v_2, \ldots, v_k$ je $k-1$.

Definicija 6. Graf G je *povezan*, če za vsaki vozlišči $u, v \in V(G)$ obstaja pot v grafu med u in v. Drugače je graf G *nepovezan*.

Na poljubnem grafu G (povezanem ali nepovezanem) lahko za vsak par vozlišč $u, v \in V(G)$ definiramo relacijo P na naslednji način:

$$uPv \iff \text{Obstaja pot med } u \text{ in } v \text{ v grafu } G.$$

Hitro se da pokazati, da je P ekvivalenčna relacija, saj veljajo vse potrebne lastnosti (glej [1]). Podgrafe, inducirane na ekvivalenčnih razredih te relacije, imenujemo *povezane komponente grafa*. Število povezanih komponent grafa G označimo z $\Omega(G)$.

2.2 Družine grafov

V teoriji grafov poznamo precej družin grafov, znotraj katerih imajo grafi določene skupne lastnosti. Velikokrat se zgodi, da kakšni izreki ali trditve ne veljajo za poljubne grafe, ampak samo za grafe iz nekaterih družin. Zato je delitev grafov v takšne družine smiselna. Ker je različnih družin grafov zelo veliko, bomo omenili samo tiste družine, ki jih bomo srečali še kasneje pri pregledu lastnosti grafov Mycielskega.

2.2.1 Polni in prazni grafi

Definicija 7.

(i) *Poln graf* K_n je graf z vozlišči $V(K_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$ in povezavami $E(K_n) = \{v_i v_j : 1 \leq i < j \leq n\}$.

(ii) *Prazen graf* $\bar{K_n}$ je graf z vozlišči $V(\bar{K_n}) = \{v_1, \dots, v_n\}$ in povezavami $E(\bar{K_n}) = \{\}$.

2.2.2 Poti in cikli

Definicija 8.

(i) *Pot* P_n je graf z vozlišči $V(P_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$ in povezavami $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} : i = 1, \dots, n-1\}$.

(ii) *Cikel* C_n je graf z vozlišči $V(C_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$ in povezavami $E(C_n) = \{v_i v_{i+1} : i = 1, \dots, n-1\} \cup \{v_1 v_n\}$.

2.2.3 Dvodelni grafi

Definicija 9. Graf G je *dvodelen*, če lahko njegovo množico vozlišč $V(G)$ zapišemo kot disjunktno unijo množic vozlišč A in B, pri čemer med vozlišči v A ni povezav in med vozlišči v B ni povezav. Množici A in B imenujemo tudi particijski množici grafa G.

2.2.4 Gozdovi in drevesa

Definicija 10.

(i) Graf G je *gozd*, če ne vsebuje nobenega cikla.

(ii) Graf G je *drevo*, če je povezan in ne vsebuje nobenega cikla.

Če je graf G gozd, so njegove povezane komponente drevesa.

2.3 Barvanje grafov

Pri grafih lahko barvamo tako vozlišča kot tudi povezave med vozlišči. Ker se lastnosti grafov Mycielskega, ki jih bomo podrobneje spoznali v nadaljevanju, tesno navezujejo na barvanje vozlišč in barvanje povezav, bomo sedaj podali osnovne definicije in lastnosti, ki se nanašajo na to področje teorije grafov.

2.3.1 Barvanje vozlišč

Definicija 11. Preslikava $f : V(G) \to \{1, \dots, k\}$ je *k-barvanje* grafa G. Barvanje je *pravilno*, če velja:

$$u, v \in V(G),\ u \sim v \Longrightarrow f(u) \neq f(v).$$

Kromatično število grafa G je

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : \text{obstaja pravilno } k\text{-barvanje}\}.$$

Opomba 2. Množico $\{1, \dots, k\}$ si lahko predstavljamo kot množico barv in jo pogosto pišemo kot $\{c_1, \dots, c_k\}$, kjer so $c_1, \dots, c_k$ različne barve. Barvanje f torej vsakemu vozlišču priredi določeno barvo.

2.3.2 Barvanje povezav

Definicija 12. Preslikava $\varphi : E(G) \to \{1, \dots, k\}$ je *k-barvanje povezav* grafa G. Barvanje je *pravilno*, če velja:

$$e, f \in E(G),\ e \neq f,\ e \cap f \neq \emptyset \Longrightarrow \varphi(e) \neq \varphi(f).$$

Kromatični indeks grafa G je

$$\chi'(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : \text{obstaja pravilno } k\text{-barvanje povezav}\}.$$

Opomba 3. Naj bo $\varphi : E(G) \to C$ pravilno barvanje povezav grafa G, kjer je $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ množica barv. Potem povezavi $e \in E(G)$ pravimo *c_i-povezava*, če je $\varphi(e) = c_i$.

Ugotovimo lahko, da lahko za poljuben graf G precej omejimo nabor možnih števil za kromatični indeks $\chi'(G)$. To nam povesta naslednji dve lastnosti.

Trditev 1. *Za poljuben graf G velja:*

$$\chi'(G) \geq \Delta(G).$$

Dokaz. Naj bo $v \in V(G)$ vozlišče z maksimalno stopnjo $\Delta(G)$, torej je v krajišče $\Delta(G)$ različnih povezav. Če želimo vse te povezave pobarvati pravilno, potrebujemo vsaj $\Delta(G)$ različnih barv, zato je $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

Izrek 2 (Vizingov izrek, [4, str. 277–278]). *Če graf G ne vsebuje večkratnih povezav, velja:*

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Iz obeh naštetih lastnostih o kromatičnem indeksu grafa G sledi, da imamo za kromatični indeks samo dve možni števili: $\Delta(G)$ in $\Delta(G) + 1$. Glede na to, katero od teh dveh števil je enako $\chi'(G)$, grafe delimo v dva razreda.

Definicija 13. Graf G je *razreda* 1, če je $\chi'(G) = \Delta(G)$, in *razreda* 2, če je $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Za nekatere družine grafov lahko pokažemo, da vsi grafi iste družine pripadajo istemu razredu. Primere takih družin nam podajo naslednje tri trditve, ki jih ne bomo posebej dokazovali, so pa vsi dokazi na voljo v [1].

Trditev 3. *Če je G dvodelni graf, je razreda* 1.

Trditev 4. *Če je n sodo naravno število, je graf K_n razreda* 1.

Trditev 5. *Če je G d-regularen graf za neko naravno število d in je $|V(G)|$ liho število, je G razreda* 2.

Ker je graf K_n $(n-1)$-regularen graf, iz trditve 5 sledi naslednja posledica.

Posledica 6. *Če je n liho naravno število in $n > 1$, je graf K_n razreda* 2.

Sedaj znamo torej določiti razred za vsak polni graf K_n (za $n \in \mathbb{N}$), za dvodelne grafe ter za d-regularne grafe na lihem številu vozlišč.

2.4 Prirejanja in pokritja

V tem razdelku bom definiral nekatere pojme, na katere se bomo kasneje sklicali pri dokazih lastnosti grafov Mycielskega. Najprej si poglejmo, kaj je prirejanje v grafu.

Definicija 14. *Prirejanje* M v grafu G je množica povezav grafa G, pri čemer nobeni dve povezavi iz M nimata skupnih krajišč. Pravimo, da je množica vozlišč A grafa G *pokrita* z M, če je vsako vozlišče iz A krajišče kakšne povezave iz M. Prirejanje M je *popolno*, če M pokriva $V(G)$.

Če je G dvodelni graf s particijskima množicama X in Y, je prirejanje M grafa G *popolno prirejanje iz X v Y*, če M pokriva vsa vozlišča množice X.

Ugotovili bomo, da za dvodelni graf G s particijo (X, Y) obstaja popolno prirejanje iz X v Y samo takrat, ko je izpolnjen določen pogoj. Toda najprej si poglejmo, kaj je množica sosedov nekega vozlišča oziroma neke množice vozlišč poljubnega grafa G.

Definicija 15.

(i) Naj bo $v \in V(G)$. Potem je *množica sosedov vozlišča v*:

$$N(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}.$$

(ii) Naj bo $S \subseteq V(G)$. Potem je *množica sosedov množice S*:

$$N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v).$$

Če je G dvodelni graf s particijo (X, Y), potem pravimo, da je za množico X izpolnjen *Hallov pogoj*, če za vsak $S \subseteq X$ velja:

$$|N(S)| \geq |S|.$$

Naslednji izrek Hallov pogoj poveže s popolnim prirejanjem v dvodelnih grafih.

Izrek 7 (Hallov izrek, [4, str. 110–111]). *Naj bo G dvodelni graf s particijskima množicama X in Y. Potem obstaja popolno prirejanje iz X v Y natanko tedaj, ko je izpolnjen Hallov pogoj za množico X.*

Sedaj vemo o prirejanjih in pokritjih v grafih vse, kar bomo v nadaljnih razdelkih potrebovali. S tem bomo tudi zaključili razdelek, v katerem smo spoznali vse potrebne definicije in lastnosti grafov, tako da se lahko v naslednjem razdelku posvetimo konstrukciji grafov Mycielskega.

3. Konstrukcija grafov Mycielskega in njihovo kromatično število

Kot smo omenili že v uvodu, so grafi Mycielskega posebna družina grafov, v kateri imajo grafi nekatere zanimive lastnosti pri barvanju vozlišč in povezav. Poljubnemu grafu G lahko priredimo njegov graf Mycielskega, ki ga označimo z $M(G)$. Kako graf $M(G)$ konstruiramo, si poglejmo v naslednji definiciji.

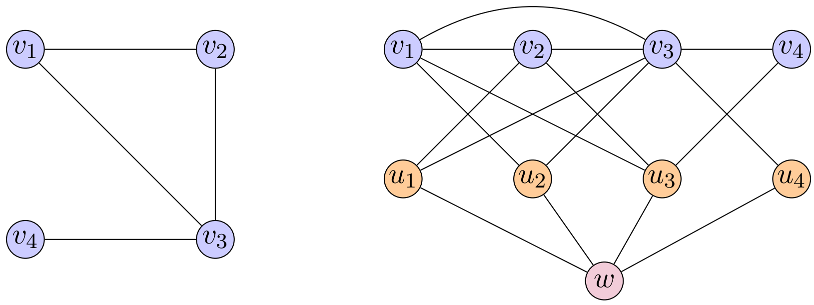
Definicija 16. Naj bo G graf z vozlišči $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ in povezavami $E(G)$. *Graf Mycielskega* $M(G)$ grafa G je definiran na naslednji način:

$$\begin{aligned} V(M(G)) &= \{v_1, \ldots, v_n\} \cup \{u_1, \ldots, u_n\} \cup \{w\}, \\ E(M(G)) &= E(G) \cup \{v_i u_j : v_i v_j \in E(G)\} \cup \{u_i w : 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Primer 1. Naj bo G graf z množico vozlišč $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ in množico povezav $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_3v_4\}$. Potem je graf Mycielskega $M(G)$ grafa G podan z naslednjima množicama:

$$V(M(G)) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, u_1, u_2, u_3, u_4, w\},$$
$$E(M(G)) = E(G) \cup \{v_1u_2, v_1u_3, \ldots, v_4u_3\} \cup \{u_iw : 1 \le i \le 4\}.$$

Na sliki 1 je na levi strani narisan graf G, na desni pa graf $M(G)$.



Slika 1. Graf G (levo) in njegov graf Mycielskega $M(G)$ (desno) iz primera 1.

Konstrukcija Mycielskega, ki smo jo pravkar opisali, je povzeta po [3]. V nadaljevanju razdelka pa se bomo lotili barvanja vozlišč grafov Mycielskega, glavne ideje razdelka bodo povzete po [4, str. 205–206]. Izrek, ki sledi, je bil pravzaprav glavni razlog za konstrukcijo grafov Mycielskega, navezuje pa se na kromatično število pri barvanju vozlišč teh grafov.

Če iščemo grafe, ki imajo čim višje kromatično število, torej za pravilno barvanje njihovih vozlišč potrebujemo čim več različnih barv, si lahko izberemo polne grafe K_n za $n \in \mathbb{N}$. V grafu K_n je namreč vsako vozlišče sosednje z vsemi ostalimi vozlišči, zato za pravilno barvanje vedno potrebujemo n različnih barv. Torej grafov s poljubno visokim kromatičnim številom ni težko najti.

Kaj pa, če želimo poiskati grafe, ki imajo prav tako poljubno visoko kromatično število, ne vsebujejo pa nobenih trikotnikov, tj. ciklov dolžine 3? Tudi tukaj imamo na izbiro kar nekaj različnih grafov, v poštev pa pridejo tudi grafi Mycielskega, ki so bili konstruirani prav za ta namen. Zakaj grafi Mycielskega spadajo v to skupino grafov, nam pove naslednji izrek.

Izrek 8. *Naj bo G graf brez trikotnikov s kromatičnim številom k. Potem je graf Mycielskega $M(G)$ tudi brez trikotnikov s kromatičnim številom $k + 1$.*

Če si torej izberemo nek poljuben graf G, ki ne vsebuje nobenega trikotnika, in je $\chi(G) = l$, lahko konstruiramo graf Mycielskega $M(G)$ grafa G in po izreku 8 sledi, da tudi $M(G)$ ne vsebuje nobenega trikotnika, njegovo kromatično število pa je $l + 1$. Če bi graf Mycielskega konstruirali še enkrat, tokrat graf Mycielskega grafa $M(G)$, bi dobili nov graf brez trikotnikov in s kromatičnim številom $l + 2$. Z zaporedno konstrukcijo grafov Mycielskega lahko torej poiščemo grafe s poljubno velikim kromatičnim številom, ki ne vsebujejo nobenega trikotnika.

4. Kromatični indeks grafov Mycielskega

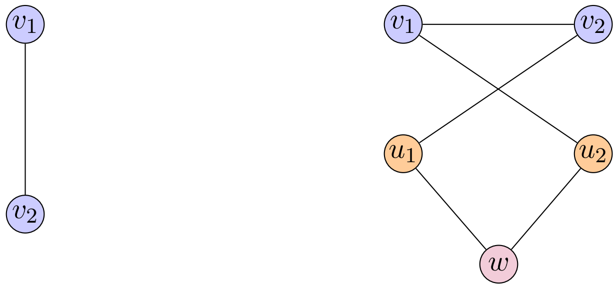
V prejšnjem razdelku smo barvali vozlišča grafov Mycielskega, sedaj pa barvajmo njihove povezave. Ugotovimo lahko, da imajo vsi grafi Mycielskega, razen graf Mycielskega $M(K_2)$ grafa K_2, pomembno lastnost, s pomočjo katere jih lahko uvrstimo v posebno skupino grafov. Ta lastnost je predstavljena v naslednjem izreku.

Izrek 9. *Za vsak graf G, razen za K_2, je graf Mycielskega $M(G)$ grafa G razreda 1, torej velja:*

$$\chi'(M(G)) = \Delta(M(G)).$$

Dokaza izreka se bomo lotili v dveh korakih. Najprej bomo pokazali, da izrek velja za vse grafe Mycielskega $M(G)$, pri katerih je osnovni graf G že razreda 1. Nato pa se bomo omejili še na grafe Mycielskega $M(G)$ z osnovnim grafom G razreda 2. Glavne ideje dokaza so povzete po [3].

Opomba 4. Izrek ne velja za osnovni graf $G = K_2$, saj je $M(K_2) = C_5$ (to je razvidno iz slike 2), vemo pa, da je $\Delta(C_5) = 2$. Prav tako lahko hitro ugotovimo, da za pravilno barvanje povezav grafa C_5 potrebujemo vsaj tri barve, zato je $\chi'(C_5) = 3 = \Delta(C_5) + 1$, torej je $M(K_2)$ razreda 2.



Slika 2. Graf K_2 (levo) in njegov graf Mycielskega $M(K_2)$ (desno).

4.1 Osnovni graf razreda 1

Če predpostavimo, da je osnovni graf G razreda 1, potem želimo dokazati naslednji izrek:

Izrek 10. *Če je graf G razreda 1 in $G \neq K_2$, je graf Mycielskega $M(G)$ grafa G tudi razreda 1.*

V dokazu izreka se za poljuben graf Mycielskega $M(G)$, pri čemer je G razreda 1, konstruira pravilno $\Delta(M(G))$-barvanje povezav grafa $M(G)$. Podrobnosti najdemo v [1].

4.2 Osnovni graf razreda 2

Za vsak graf G, ki je razreda 1, veljavnost izreka 9 sledi iz izreka 10. Sedaj pa se lotimo primera, ko je graf G razreda 2. Želimo torej pokazati:

Izrek 11. *Če je graf G razreda 2, je graf Mycielskega $M(G)$ grafa G razreda 1.*

Preden bomo ta izrek dokazali, si bomo pogledali več pomožnih lem, ki jih bomo v dokazu izreka kasneje uporabili. Prva lema klasificira grafe Mycielskega polnih grafov, druga lema nam pove, da za grafe razreda 2 obstaja pravilno barvanje povezav s posebno lepimi lastnostmi, tretja lema pa nam poda zadosten pogoj za obstoj popolnega prirejanje iz X v Y v dvodelnem grafu $G = (X, Y)$.

Lema 12. *Naj bo $n \geq 3$. Potem je graf Mycielskega $M(K_n)$ grafa K_n razreda 1.*

Lema 13. *Naj bo G graf razreda 2 z maksimalno stopnjo D. Potem obstaja tako pravilno $(D+1)$-barvanje povezav $\phi : E(G) \to C$ in preslikava $\psi : V(G) \to C$, da veljata naslednji lastnosti:*

(i) za vsako vozlišče $v \in V(G)$ velja, da v ni krajišče nobene $\psi(v)$-povezave;

(ii) za vsaki barvi $c_1, c_2 \in C$ velja, da je $\big||\psi^{-1}(c_1)| - |\psi^{-1}(c_2)|\big| \leq 2$.

Lema 14. *Naj bo $n \geq 3$ in naj bo G dvodelni graf s particijskima množicama X in Y. Naj velja:*

(i) $|X| = |Y| = n + 1$;

(ii) $N(X) = Y$;

(iii) $\sum_{v \in S} d(v) \geq n(|S| - 1) + 1$ *za* $\forall S \subseteq X$.

Potem obstaja popolno prirejanje iz X *v* Y.

Dokazi vseh treh lem so podani v [1], oglejmo pa si še trditev, ki nam poda zadostni pogoj, da je nek graf razreda 1.

Trditev 15. *Naj bo* G *graf. Če je podgraf grafa* G*, induciran na vseh vozliščih z maksimalno stopnjo* $\Delta(G)$*, gozd, je graf* G *razreda* 1.

Dokaz trditve je na voljo v [2]. Sedaj smo spoznali vse potrebne leme in trditve, zato se lahko lotimo dokaza glavnega izreka.

Dokaz (izreka 11). Naj bo G graf razreda 2 z maksimalno stopnjo D. Naj bo $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, torej je $|V(G)| = n$.

Če je $n > 2D$, je $\Delta(M(G)) = \max\{2D, n\} = n$ in je edino vozlišče v $M(G)$ s stopnjo n vozlišče w. Zato je podgraf grafa $M(G)$, induciran na vozliščih z maksimalno stopnjo, graf K_1, ki je gozd. Po trditvi 15 sledi, da je $M(G)$ razreda 1.

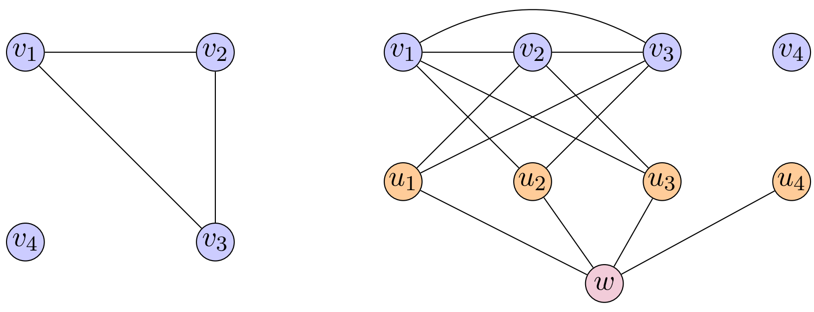
Zato se lahko osredotočimo na primer, ko je $n \leq 2D$. Najprej bomo obravnavali dva posebna primera:

- Če je $D = 1$ in $n \leq 2D = 2$, je G lahko samo graf K_2, ki je razreda 1, zato ga obravnamo že pri izreku 10.

- Če je $D = 2$ in $n \leq 2D = 4$, je G lahko ali graf razreda 1, katerega graf Mycielskega je po izreku 10 razreda 1, ali pa eden izmed grafov K_3 in $K_3 \cup K_1$. Ker je K_3 polni graf z več kot dvema vozliščema, je po lemi 12 $M(K_3)$ razreda 1. Povezave grafa $M(K_3 \cup K_1)$ pa so naslednje:

$$E(M(K_3 \cup K_1)) = E(M(K_3)) \cup \{wu_4\}.$$

(Pomen oznak je razviden iz slike 3.)



Slika 3. Graf $K_3 \cup K_1$ (levo) in njegov graf Mycielskega $M(K_3 \cup K_1)$ (desno).

Vemo, da je $\Delta(M(K_3 \cup K_1)) = 2D = 4$. Če povezave grafa $M(K_3 \cup K_1)$ pravilno pobarvamo s 4 barvami, bomo s tem dokazali, da je $M(K_3 \cup K_1)$ razreda 1. Ker je $M(K_3)$ razreda 1, lahko vse povezave iz množice $E(M(K_3))$ pobarvamo s 4 barvami. Pobarvati moramo samo še povezavo wu_4. Ker je vozlišče u_4 krajišče samo povezave wu_4, vozlišče w pa je krajišče še treh drugih povezav, lahko za barvanje povezave wu_4 izberemo tisto barvo, ki je še prosta pri vozlišču w. Tako dobimo pravilno 4-barvanje povezav, zato je graf $M(K_3 \cup K_1)$ razreda 1.

Torej lahko privzamemo, da je $n \leq 2D$ in $D \geq 3$. Vemo, da je potem $\Delta(M(G)) = \max\{n, 2D\} = 2D$. Želimo pokazati, da je graf $M(G)$ razreda 1. To bomo pokazali s konstrukcijo pravilnega $(2D)$-barvanja povezav grafa $M(G)$.

Iskano barvanje povezav bomo konstruirali v treh delih. Kratek povzetek delov je naslednji:

1. del: konstrukcija pravilnega $(D+1)$-barvanja povezav grafa G;

2. del: konstrukcija pravilnega $(2D)$-barvanja povezav grafa $M(G) - w$;

3. del: konstrukcija pravilnega $(2D)$-barvanja povezav grafa $M(G)$.

1. del: Naj bo $C = \{c_1, \ldots, c_{D+1}\}$ množica barv. Ker je G razreda 2, po lemi 13 obstaja tako pravilno $(D+1)$-barvanje povezav $\phi : E(G) \to C$ in preslikava $\psi : V(G) \to C$, da veljata naslednji lastnosti:

- vsak $v \in V(G)$ ni krajišče nobene $\psi(v)$-povezave;
- za vsaki $c_1, c_2 \in C$ je $||\psi^{-1}(c_1)| - |\psi^{-1}(c_2)|| \leq 2$.

Naj bo $m = \max\{|\psi^{-1}(c_i)| : i \in [D+1]\}$. Iz druge lastnosti preslikave ψ sledi, da je $m - 2 \leq |\psi^{-1}(c_i)|$ za vsak $i \in [D+1]$. Vemo tudi, da je $n = \sum_{i=1}^{D+1} |\psi^{-1}(c_i)|$ in $n \leq 2D$, torej velja:

$$2D \geq n = \sum_{i=1}^{D+1} |\psi^{-1}(c_i)| \geq (D+1)(m-2) = (D+1)m - 2(D+1).$$

Sledi:

$$(D+1)m \leq 4D + 2 = 4(D+1) - 2$$
$$m \leq 4 - \frac{2}{D+1}$$

Ker je $D \geq 3$, je torej $m \leq 3$. To neenakost bomo uporabili kasneje.

2. del: Razširimo sedaj naše barvanje povezav ϕ v $(2D)$-barvanje povezav grafa $\widetilde{G} = M(G) - w$. Vemo, da je $V(\widetilde{G}) = V \cup U$, kjer je $V = V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ in $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$.

Naj bo G_1 vpeti podgraf grafa $\widetilde{G}$, pri čemer je množica povezav grafa G_1 sestavljena samo iz povezav med V in U, torej je G_1 dvodelni graf. Po trditvi 3 je G_1 graf razreda 1 in ker je $\Delta(G_1) = \Delta(G) = D$, obstaja pravilno D-barvanje povezav $\phi_1 : E(G_1) \to C_1$, kjer je $C_1 = \{c_{D+2}, \ldots, c_{2D+1}\}$ množica barv.

Naj bo $\widetilde{C} = (C \cup C_1) \setminus \{c_{2D+1}\} = \{c_1, \ldots, c_{2D}\}$. Radi bi konstruirali pravilno $(2D)$-barvanje povezav $\phi' : E(\widetilde{G}) \to \widetilde{C}$. To lahko naredimo na naslednji način:

- za vsako povezavo $v_i v_j \in E(\widetilde{G})$ definiramo:

$$\phi'(v_i v_j) = \phi(v_i v_j).$$

- za vsako povezavo $v_i u_j$ definiramo:

$$\phi'(v_i u_j) = \begin{cases} \phi_1(v_i u_j); & \text{če je } \phi_1(v_i u_j) \neq c_{2D+1} \\ \psi(v_i); & \text{če je } \phi_1(v_i u_j) = c_{2D+1} \end{cases}$$

Da je ϕ' pravilno $(2D)$-barvanje povezav grafa $\widetilde{G}$, ni težko preveriti. Treba je samo pokazati, da za vsako povezavo $v_i u_j$, za katero je $\phi_1(v_i u_j) = c_{2D+1}$, po zamenjavi barve te povezave z barvo $\psi(v_i)$ barvanje povezav ostane pravilno. Vozlišči v_i in u_j sta pred zamenjavo barve krajišči največ ene c_{2D+1}-povezave (drugače barvanje ϕ_1 ne bi bilo pravilno) in nobene $\psi(v_i)$-povezave, zato dodatna barva $\psi(v_i)$ pri nobenem od vozlišč ne pokvari barvanja. Torej je ϕ' pravilno $(2D)$-barvanje povezav grafa $\widetilde{G}$.

3. del: Za konstrukcijo pravilnega barvanja povezav celotnega grafa $M(G)$ moramo z barvami iz $\widetilde{C}$ pravilno pobarvati še vse povezave wu_i za $i \in [n]$. Najprej za vsak $i \in [D+1]$ definirajmo naslednjo množico:

$$X_i = \{u_j \in U;\ u_j \text{ je krajišče } c_i\text{-povezave (glede na barvanje } \phi')\}.$$

Naj bo potem:

$$X = U \setminus \bigcup_{i=1}^{D+1} X_i.$$

Vozlišče $u_j \in U$ je lahko krajišče samo ene c_i-povezave za $i \in [D+1]$, saj je taka povezava pobarvana z barvo c_{2D+1} pri barvanju ϕ_1 (ker je ϕ_1 pravilno barvanje, je lahko u_j glede na barvanje ϕ_1 krajišče samo ene c_{2D+1}-povezave). To pomeni, da je $X_i \cap X_j = \emptyset$ za $i \neq j$, torej je U disjunktna unija množic $X_1, \ldots, X_{D+1}, X$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $|X_1| \geq |X_2| \geq \cdots \geq |X_{D+1}|$ (to lahko dosežemo z ustrezno zamenjavo oznak barv v množici $\widetilde{C}$). Velja tudi naslednja neenakost:

$$|X_i| \leq |\psi^{-1}(c_i)| \leq m \leq 3. \tag{1}$$

Vozlišča $u_1, \ldots, u_n$ želimo urediti v vrstni red $u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}$ tako, da za $j \in [D+1]$ vsako vozlišče u_{i_j} ni krajišče nobene c_j-povezave. Najprej bomo določili u_{i_1}. Če je $X \neq \emptyset$, izberemo poljuben $x \in X$ in je $u_{i_1} = x$. Če pa je $X = \emptyset$, izberemo poljuben $y \in X_j$, pri čemer je j največje tako naravno število, da je $X_j \neq \emptyset$, in določimo $u_{i_1} = y$.

Če bi bil u_{i_1} krajišče c_1-povezave, bi bil $u_{i_1} \in X_1$, torej bi moral biti $U = X_1$. Ker je $D \geq 3$, je $n \geq 4$, zato je $|U| \geq 4$, po drugi strani pa je $|X_1| \leq 3$ (zaradi neenakosti (1)). Zato je $U \neq X_1$ in u_{i_1} ni krajišče nobene c_1-povezave. Vsa ostala vozlišča $u_{i_2}, \ldots, u_{i_n}$ določimo tako, da veljata naslednji zahtevi:

- za $j, k \in [D+1]$, $j < k$ se vsako vozlišče iz $X_j \setminus \{u_{i_1}\}$ v zaporedju $u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}$ pojavi pred vsemi vozlišči iz $X_k \setminus \{u_{i_1}\}$;
- za vsak $j \in [D+1]$ se vsako vozlišče iz $X_j \setminus \{u_{i_i}\}$ v zaporedju $u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}$ pojavi pred vsemi vozlišči iz $X \setminus \{u_{i_1}\}$.

S tema zahtevama ugodimo začetni želji, da za vsak $j \in [D+1]$ vozlišče u_{i_j} ni krajišče nobene c_j-povezave, saj bi drugače bil $u_{i_k} \in X_k$ za nek $k \in [D+1]$. To pa ni možno, saj če želimo zadostiti zgornjima zahtevama, je $u_{i_2} \in X_1$ in zaradi pogoja $|X_1| \geq |X_2| \geq \cdots \geq |X_{D+1}|$ potem sledi $u_{i_j} \notin X_j$ za vsak $j \in [D+1]$.

Sedaj se lahko lotimo konstrukcije pravilnega $(2D)$-barvanja povezav $\widetilde{\phi} : E(M(G)) \to \widetilde{C}$., ki bo potekala v dveh korakih.

Korak I: Najprej izberimo prvih $n-D-1$ vozlišč $u_{i_1}, \ldots, u_{i_{n-D-1}} \in U$. Barvanje $\phi' : E(\widetilde{G}) \to \widetilde{C}$ spremenimo v pravilno $(2D)$-barvanje povezav

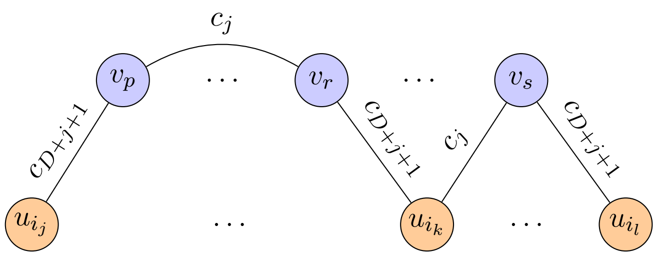
$$\widetilde{\phi} : E(\widetilde{G}) \cup \{wu_{i_j} : j = 1, \ldots, n-D-1\} \to \widetilde{C}$$

tako, da za vsak $j = 1, \ldots, n - D - 1$ preverimo, če je u_{i_j} krajišče c_{D+j+1}-povezave. Če takšna povezava obstaja, si ogledamo vpet podgraf $\widetilde{G}(c_j, c_{D+j+1})$ grafa $\widetilde{G}$, ki vsebuje samo povezave barv c_j in c_{D+j+1}. Označimo s K_j tisto komponento $\widetilde{G}(c_j, c_{D+j+1})$, ki vsebuje vozlišče u_{i_j} (primer te komponente je na sliki 4). Ker je u_{i_j} krajišče c_{D+j+1}-povezave in ni krajišče nobene c_j-povezave (to smo dosegli z ureditvijo $u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}$), je K_j pot dolžine vsaj 1 (vsa vozlišča v K_j so stopnje največ 2, ker pa u_{i_j} ni krajišče c_j-povezave, K_j ni cikel).

Če v K_j med seboj zamenjamo barvi c_j in c_{D+j+1}, barvanje ϕ' spremenimo v $(2D)$-barvanje povezav $\widetilde{\phi}$, definirano na množici povezav $E(\widetilde{G})$, ki je še vedno pravilno. Hkrati pa s tem zagotovimo, da za vsak $j = 1, \ldots, n - D - 1$ vozlišče u_{i_j} ni krajišče nobene c_{D+j+1}-povezave. Zato lahko za vsako povezavo wu_{i_j} (za $j = 1, \ldots, n - D - 1$) definiramo:

$$\widetilde{\phi}(wu_{i_j}) = c_{D+j+1}.$$

Tako dobimo pravilno $(2D)$-barvanje povezav na množici povezav $E(\widetilde{G}) \cup \{wu_{i_j} : j = 1, \ldots, n - D - 1\}$.



Slika 4. Primer poti K_j v podgrafu $\widetilde{G}(c_j, c_{D+j+1})$.

Korak II: Sedaj izberimo $U_1 = U \setminus \{u_{i_1}, \ldots, u_{i_{n-D-1}}\}$, ki vsebuje še $D+1$ preostalih u_{i_j} vozlišč. Barvanje $\widetilde{\phi}$ želimo razširiti še na povezave $\{wu_{i_j} : j = n - D, \ldots, n\}$. Nobena povezava s krajiščem v vozlišču w zaenkrat še ni pobarvana z barvo iz množice $C = \{c_1, \ldots, c_{D+1}\}$, zato lahko te barve porabimo za barvanje preostalih wu_{i_j} povezav. Definirajmo dvodelni graf B na naslednji način:

$$\begin{aligned} V(B) &= U_1 \cup C, \\ E(B) &= \{u_{i_j} c_k : \ u_{i_j} \text{ ni krajišče nobene } c_k\text{-povezave}\}. \end{aligned}$$

Pokažimo, da graf B zadošča pogojem (i), (ii) in (iii) iz leme 14.

(i) Ker je $|U_1| = |C| = D + 1$, ta pogoj očitno drži.

(ii) Želimo dokazati, da je $N(U_1) = C$. Najprej bomo pokazali, da je $D - |U_1 \cap X_i| \geq 1$ za vsak $i = 1, \ldots, D + 1$. Ločili bomo dva primera.

- Če je $D = 3$, je $n \leq 2D = 6$. Naš cilj je pokazati, da je $|U_1 \cap X_i| \leq 2$ za vsak $i = 1, \ldots, 4$, saj je potem $D - |U_1 \cap X_i| \geq 3 - 2 = 1$.

  Vemo, da je $|X_i| \leq 3$ (sledi iz neenakosti (1)). Če je $|X_i| \leq 2$ za vsak $i = 1, \ldots, 4$, je tudi $|U_1 \cup X_i| \leq 2$. Drugače pa obstaja nek $j \in \{1, \ldots, 4\}$, da je $|X_j| = 3$. Zaradi lastnosti $|X_1| \geq |X_2| \geq \cdots \geq |X_{D+1}|$ lahko izberemo $j = 1$, torej $|X_1| = 3$. Ker je $|X_1| \leq |\psi^{-1}(c_1)| \leq 3$, je tudi $|\psi^{-1}(c_1)| = 3$. Zaradi pogoja $||\psi^{-1}(c_i)| - |\psi^{-1}(c_j)|| \leq 2$ za $i \neq j$ mora biti $|\psi^{-1}(c_i)| \geq 1$ za vsak $i = 2, 3, 4$.

  Torej je $\sum_{i=1}^{4} |\psi^{-1}(c_i)| \geq 3 + 1 + 1 + 1 = 6$. Vemo pa tudi, da je $\sum_{i=1}^{4} |\psi^{-1}(c_i)| = n \leq 6$. Zato je $\sum_{i=1}^{4} |\psi^{-1}(c_i)| = 6$ in za $n < 6$ sploh ne obstaja noben graf, ki bi ustrezal vsem našim predpostavkam.

Zato se lahko omejimo samo na primer, ko je $n = 6$. Vemo, da je $|\psi^{-1}(c_i)| = 1$ za $i = 2, 3, 4$ (drugače bi bila $\sum_{i=1}^{4} |\psi^{-1}(c_i)| > 6 = n$). Torej je $|X_i| \leq |\psi^{-1}(c_i)| = 1$ za $i = 2, 3, 4$.

Pri koraku I izberemo $n - D - 1 = 2$ vozlišči iz U, torej poleg vozlišča u_{i_1} še eno vozlišče u_{i_2} iz množice X_1. Ker je $U_1 = U \setminus \{u_{i_1}, u_{i_2}\}$, je $|U_1 \cap X_1| = 2$.

Torej za vsak $i = 1, 2, 3, 4$ velja $|U_1 \cap X_i| \leq 2$, zato je:

$$D - |U_1 \cap X_i| \geq 1.$$

- Če pa je $D \geq 4$, za $i = 1, \ldots, D + 1$ velja:

$$|U_1 \cap X_i| \leq |X_i| \leq 3.$$

Zato sledi:

$$D - |U_1 \cap X_i| \geq 1.$$

Da dokažemo $N(U_1) = C$, je dovolj za vsak $i = 1, \ldots, D + 1$ pokazati, da je $d(c_i) \geq 1$. Barva c_i je v grafu B povezana z vsemi vozlišči iz U_1, razen z vozlišči iz množice X_i, možno pa je tudi, da ni povezave med c_i in še enim vozliščem iz U_1, ki je postalo krajišče c_i-povezave pri zamenjavi barv v koraku I (tako vozlišče je lahko samo eno, saj se vsaka barva c_j menja največ enkrat, in sicer pri vozlišču u_{i_j}, edini kandidat, ki bi lahko na novo dobil c_j-povezavo, pa je krajišče poti K_j, ki je na nasprotni strani kot u_{i_j}).

Torej za vsak $i = 1, \ldots, D + 1$ velja:

$$d(c_i) \geq D + 1 - (|U_1 \cap X_i| + 1) = D - |U_1 \cap X_i| \geq 1.$$

Zato je $N(U_1) = C$.

(iii) Sedaj želimo pokazati, da za vsak $S \subseteq U_1$ velja:

$$\sum_{u \in S} d(u) \geq D(|S| - 1) + 1.$$

Naj bo $S \subseteq U_1$. Vsako vozlišče $u \in S$ je povezano z vsemi barvami iz C, manjkajo samo povezave uc_i, če je u krajišče c_i-povezave. Ker želimo določiti spodnjo mejo za $\sum_{u \in S} d(u)$, nas zanima zgornja meja za $\sum_{i=1}^{D+1} |e : \ e \text{ je } c_i\text{-povezava s krajiščem v množici } S|$.

Pred zamenjavami barv v koraku I je vsako vozlišče iz S krajišče največ ene c_i-povezave za $i = 1, \ldots, D + 1$ (saj je pogoj za c_i-povezavo pri vozlišču iz U povezava barve c_{2D+1} pri pravilnem barvanju ϕ_1). Po zamenjavah barv pa lahko dobimo še največ $n - D - 1$ dodatnih c_i-povezav s krajiščem v množici S, saj pri vsaki zamenjavi dobimo največ eno novo c_i-povezavo.

Zato velja:

$$\sum_{i=1}^{D+1} |e : \ e \text{ je } c_i\text{-povezava s krajiščem v množici } S| \leq |S| + n - D - 1.$$

Torej sledi:

$$\begin{aligned}\sum_{u\in S} d(u) = |\{&\text{vse možne povezave med } S \text{ in } C \text{ (brez omejitev)}\}|- \\ &- \sum_{i=1}^{D+1} |e: \ e \text{ je } c_i\text{-povezava s krajiščem v množici } S| \\ &\geq |S|(D+1) - (|S| + n - D - 1) \\ &= D|S| - (n - D - 1) \\ &\geq D|S| - (2D - D - 1) \\ &= D(|S| - 1) + 1\end{aligned}$$

Ker veljajo vsi pogoji (i)-(iii), po lemi 14 sledi, da obstaja popolno prirejanje iz U_1 v C. Naj bo $f : U_1 \to C$ preslikava, ki jo definira popolno prirejanje ($f(u_{i_k}) = c_j$, če je povezava $u_{i_k}c_j$ vsebovana v popolnem prirejanju). Sedaj lahko $\widetilde{\phi}$ definiramo še na vozliščih iz U_1. Za $k = n - D, \dots, n$ naj velja:

$$\widetilde{\phi}(wu_{i_k}) = f(u_{i_k}).$$

Tako smo konstruirali pravilno $(2D)$-barvanje povezav $\widetilde{\phi} : E(M(G)) \to \widetilde{C}$. S tem smo dokazali, da je $M(G)$ razreda 1 za graf G razreda 2.

S tem smo zaključili dokaz glavnega izreka tega članka in smo torej vse grafe Mycielskega, razen seveda grafa $M(K_2)$, glede na kromatični indeks uvrstili v razred 1. Tako smo dobili še en zadosten pogoj, da je poljuben graf G razreda 1. Če namreč pokažemo, da je G graf Mycielskega nekega drugega grafa, s tem tudi dokažemo, da je G razreda 1.

5. Zaključek

V članku smo spoznali nekatere lastnosti grafov Mycielskega, ki se navezujejo na barvanje vozlišč in povezav. Znanih pa je še več drugih lastnosti te družine grafov, ki jih nismo omenili. To nakazuje, da so grafi Mycielskega zanimivi za preučevanje in z njimi se je glede na [6] ukvarjalo precej različnih matematikov. Verjetno pa obstaja še več drugih lastnosti teh grafov, ki še niso odkrite in bodo mogoče nekoč pomembne v teoriji grafov, zato zagotovo ni slabo, da ste se skozi članek pobliže spoznali z grafi Mycielskega in preučili vsaj nekaj njihovih lastnosti.

LITERATURA

[1] A. Božič, *Grafi Mycielskega in njihov kromatični indeks*, diplomsko delo, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2014.

[2] J. C. Fournier, *Méthode et théorème générale de coloration des arêtes*, J. Math. Pures Appl. **56** (1977), 437–453.

[3] Y. S. Kwon, J. Lee in Z. Zhang, *Edge-chromatic numbers of Mycielski graphs*, Discrete Math. **312** (2012), 1222–1225.

[4] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, 2001.

[5] *Edge coloring*, [ogled 6. 8. 2014], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Edge_coloring.

[6] *Mycielskian*, [ogled 6. 8. 2014], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Mycielskian.