

BOSE-EINSTEINOVA KONDENZACIJA SVETLOBE

MARKO LJUBOTINA

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V članku predstavim pojav Bose-Einsteinove kondenzacije fotonov. Najprej opišem Bose-Einsteinov kondenzat, nato pa se osredotočim na njegov pojav v fotonskih sistemih. Za konec omenim še potencialno uporabo tega pojava.

BOSE-EINSTEIN CONDENSATION OF LIGHT

In this article, I describe the phenomenon known as the Bose-Einstein condensation of photons. First, I describe Bose-Einstein condensation, after which I focus on the appearance of the phenomenon in photonic systems. Finally, I mention the potential uses this may have.

Uvod

Bose-Einsteinov kondenzat je stanje snovi, kjer večina delcev¹ zavzema najnižje možno energijsko stanje. Je eden od treh kvantnih pojavov, poleg superprevodnosti in supertekočnosti, ki jih opazimo tudi na makroskopskem nivoju.

Za razliko od superprevodnosti in supertekočnosti so Bose-Einsteinovo kondenzacijo najprej predvideli teoretično. Satyendra Nath Bose je leta 1924 napisal članek o kvantni statistiki svetlobe, Einstein pa je njegovo teorijo² leta 1925 razširil še na masivne delce.

Eksperimentalno so Bose-Einsteinov kondenzat prvič ustvarili leta 1995 in sicer ekipa Cornella in Wiemana na Univerzi v Coloradu z rubidijevim plinom ohlajenim na 170 nK [1], ter ekipa Ketterla na MIT s plinom natrijevih atomov ohlajenih na 2 μ K [2]. Za ta dosežek so leta 2001 prejeli Nobelovo nagrado. V svetlobi je bil pojav prvič opažen leta 2010 na Univerzi v Bonnu, kjer je poskus izvedla skupina pod vodstvom M. Weitz-a [3].

Z razvojem tehnologije v zadnjih letih področje ostaja zanimivo. Poleg tega, da za opazovanje pojava v plinih dosegamo vedno nižje temperature, se odpirajo tudi možnosti za opazovanje pojava v novih sistemih, na primer Bose-Einsteinova kondenzacija magnonov v antiferomagnetih [4].

1. Bose-Einsteinov kondenzat

V tem poglavju bom pokazal izpeljavo Bose-Einsteinove statistike ter kako iz tega sledi fazni prehod v Bose-Einsteinov kondenzat.

1.1 Bose-Einsteinova porazdelitev

Bose-Einsteinova porazdelitev nam pove, kako se bozoni razporedijo po dovoljenih energijskih stanjih pri dani energiji sistema. Izračunamo jo lahko na dva načina - prek mikrokanoničnega ali veleanoničnega ansambla. Najprej bom to pokazal prek mikrokanoničnega ansambla [5], potem pa na kratko še prek veleanoničnega.

¹V splošnem bozonov, saj fermioni zaradi Paulijevega izključitvenega načela ne morejo zasedati istih energijskih stanj v večjem številu. Lahko pa se tvorijo Cooperjevi pari dveh fermionov, ki se nato obnašajo kot bozoni, saj se skupni spin tega sistema sešteje v celoštevilsko vrednost.

²Bose-Einsteinova teorija ne upošteva interakcij med delci. Kasneje so bile postavljene nove teorije, ki opisujejo Bose-Einsteinove kondenzate v sistemih, kjer so upoštewane tudi med-delčne interakcije, na primer Gross-Pitaevskii in kasneje, bolj splošno, Pelemitkii.

1.1.1 Mikrokanonična izpeljava

Za vsem skupaj stoji ideja, da lahko za več bozonov v istem stanju enostavno preštejemo vsa možna stanja sistema s pomočjo kombinatorike. Če imamo N identičnih delcev s celoštevilskim spinom in M možnih energijskih stanj za vsakega izmed njih, je skupno število možnih stanj sistema enako

$$P = \frac{(N + M - 1)!}{N!(M - 1)!}. \quad (1)$$

Zgornji del izraza sledi iz tega, da lahko vsakega izmed N delcev razporedimo v M možnih stanj. Spodnji faktor pa je posledica tega, da so delci nerazločljivi.

Predpostavimo, da je naš sistem plin N bozonov, ki zavzemajo volumen V , ter da za ta plin veljajo periodični robni pogoji. Tako dobimo valovno funkcijo delcev, ki je v tem primeru kar funkcija ravnega vala

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2)$$

kjer so dovoljeni valovni vektorji

$$\mathbf{k} = \left(\frac{2\pi n_x}{L_x}, \frac{2\pi n_y}{L_y}, \frac{2\pi n_z}{L_z} \right), \quad (3)$$

kjer so L_x, L_y in L_z dimenzije sistema v pripadajočih smereh. Definiramo lahko skupen volumen sistema $V = L_x L_y L_z$, iz česar sledi, da se v vsakem volumnu $d^3k = dk_x dk_y dk_z$ v k -prostoru nahaja dN stanj, kjer je

$$dN = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k. \quad (4)$$

Vsako od teh kvantnih stanj ima energijo

$$E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad (5)$$

kjer je m masa delca. Iz tega lahko z integracijo po krogelnih lupinah v k -prostoru določimo število energijskih stanj med energijama E in $E + \delta E$

$$M = Vg(E)\delta E, \quad (6)$$

kjer $g(E)$ predstavlja energijsko gostoto stanj in je v primeru 3-dimenzionalnega sistema prostih delcev enaka

$$g(E) = \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} E^{1/2}. \quad (7)$$

Enačba (6) nam torej pove, koliko energijskih stanj se nahaja v določeni lupini. Če želimo določiti skupno število vseh možnih stanj, moramo zmnožiti število možnih razporeditev v vsaki lupini, torej

$$W = \prod_i \frac{(N_i + M_i - 1)!}{N_i!(M_i - 1)!}. \quad (8)$$

S pomočjo Stirlingovega približka $\ln N! \sim N \ln N - N$, ki velja za $N \gg 1$, lahko zapišemo entropijo sistema kot

$$S = k_B \ln W = k_B \sum_i [(N_i + M_i) \ln(N_i + M_i) - N_i \ln N_i - M_i \ln M_i]. \quad (9)$$

Kot vemo, se bo sistem v termičnem ravnovesju organiziral tako, da maksimizira svojo entropijo, pri čemer pa ohrani konstantno število delcev $N = \sum_i N_i$ ter skupno energijo $E = \sum_i E_i N_i$. Enačbo lahko rešimo z vezanim ekstremom

$$\frac{\partial S}{\partial N_i} - k_B \beta \frac{\partial U}{\partial N_i} + k_B \beta \mu \frac{\partial N}{\partial N_i} = 0, \quad (10)$$

kjer smo za Lagrangeve multiplikatorje vzeli kar $-k_B\beta$ in $k_B\beta\mu$. Tu sta $\beta = (k_B T)^{-1}$ in μ kemijski potencial plina, kar sledi iz zakonov termodinamike, v katere se tu ne bomo spuščali[5]. Enačbo lahko rešimo ter rešitev prepisemo kot

$$N_i = \frac{1}{\exp(\beta(E_i - \mu)) - 1} M_i, \quad (11)$$

kjer definiramo Bose-Einsteinovo porazdelitev, ki nam pove populacijo stanj z energijo E_i , kot

$$f_{BE} = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} - 1}. \quad (12)$$

1.1.2 Velekanonična izpeljava

Medtem ko sta v mikrokaničnem ansamblu energija E in število delcev N konstanta, to pri velekanoničnem ne velja. Vemo, da lahko verjetnostno gostoto zapišemo kot

$$\rho(E, N) = C \exp(\beta\mu N - \beta E), \quad (13)$$

kjer je $\beta = (k_B T)^{-1}$ in μ kemijski potencial plina. Prav tako vemo, da pri velekanonični porazdelitvi veljata naslednji zvezi

$$e^{-\beta q} = C \sum_N \int \exp(\beta\mu N - \beta E) d\Gamma, \quad (14)$$

kjer q predstavlja velepotencial in $\int d\Gamma$ integral po celem faznem prostoru, ki se lahko v primeru diskretnih stanj spremeni v vsoto po vseh možnih energijskih stanjih, ter

$$\langle N \rangle = - \left(\frac{\partial(\beta q)}{\partial(\beta\mu)} \right)_\beta, \quad (15)$$

kjer $\langle N \rangle$ predstavlja povprečno število delcev.

Definiramo število delcev v i -tem stanju N_i kot število delcev v stanju z energijo E_i ter energijo sistema kot vsoto $E = \sum E_i N_i$. Tako lahko enačbo (13) prepisemo v

$$e^{-\beta q} = \sum_i \frac{1}{1 - \exp(\beta\mu - \beta E_i)}. \quad (16)$$

Iz tega lahko nato izrazimo velepotencial

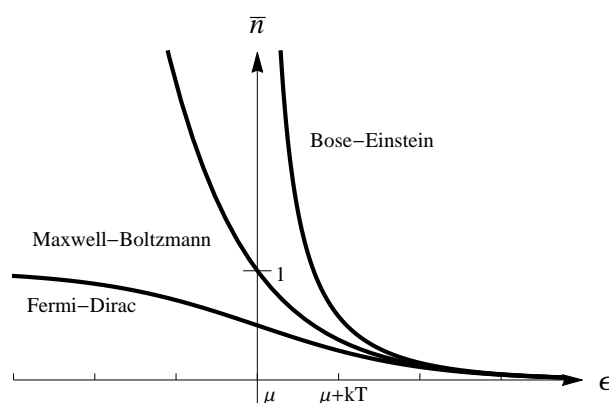
$$\beta q = \sum_i \ln(1 - e^{\beta\mu - \beta E_i}), \quad (17)$$

ki ga vstavimo v enačbo (15). Iz tega hitro sledi

$$\langle N \rangle = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(E_i - \mu)} - 1}, \quad (18)$$

kjer ponovno definiramo Bose-Einsteinovo porazdelitev kot

$$f_{BE} = \frac{1}{e^{\beta(E_i - \mu)} - 1}. \quad (19)$$



Slika 1. Skica Bose-Einsteinove, Maxwell-Boltzmannove in Fermi-Diracove porazdelitve. Na sliki predstavlja \bar{n} povprečno število delcev v najnižjem stanju in ϵ energijo sistema.

1.2 Fazni prehod

Za razliko od klasičnega idealnega plina, ki sledi Maxwellovi porazdelitvi, ali Fermi-Diracovega plina fermionov, ki sledi Fermi-Diracovi porazdelitvi, se pri Bose-Einsteinovem idealnem plinu pojavi termodinamični fazni prehod v stanje, ki ga poznamo kot Bose-Einsteinov kondenzat. Vendar pa gre tu za fazni prehod delcev, ki med seboj ne interagirajo. Prehod torej ni posledica medsebojnih vezi med delci, temveč gre za posledico same statistike.

Kot pri vseh faznih prehodih tudi tu obstaja točka, kjer se spremenijo vse termodinamske lastnosti sistema. Ta točka definira temperaturo prehoda T_c . Za razliko od navadne kondenzacije, kjer se kondenzirani delci ločijo od ostalih v prostoru, se v primeru Bose-Einsteinovega kondenzata delci ločijo od ostalih v prostoru gibalnih količin.

Predpostavimo, da se nahajamo v neskončnem prostoru, torej $V \rightarrow \infty$. To pomeni, da lahko vsoto iz enačbe (18) prepíšemo v integralsko obliko, saj možni valovni vektorji \mathbf{k} postanejo zvezni. Dobimo

$$\sum_i \rightarrow \int \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k. \quad (20)$$

Tako lahko definiramo številsko gostoto delcev kot

$$n = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{e^{\beta(E(k)-\mu)} - 1} d^3k, \quad (21)$$

kar pa lahko prepíšemo z uporabo gostote stanj iz enačbe (7)

$$n = \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} - 1} g(E) dE. \quad (22)$$

Z uvedbo novih spremenljivk, $z = e^{\beta\mu}$ in $x = \beta E$, lahko enačbo (22) prepíšemo v

$$n = \frac{(mk_B T)^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \int_0^\infty \frac{z e^{-x}}{1 - z e^{-x}} \sqrt{x} dx. \quad (23)$$

Dobljeni integral rešimo [6], tako dobimo izraz za številsko gostoto delcev

$$n = \left(\frac{mk_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} g_{3/2}(z), \quad (24)$$

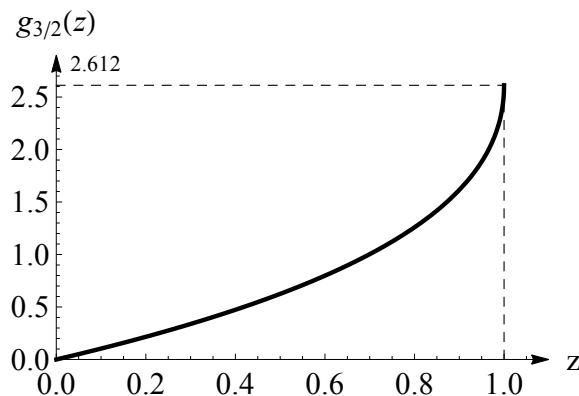
kjer je funkcija $g_j(z)$ polilogaritem stopnje j , definiran z neskončno vrsto kot

$$g_j(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{z^s}{s^j}. \quad (25)$$

Funkcija $g_{3/2}(z)$ je očitno konvergentna za $z \leq 1$ in divergentna za vse ostale $z > 1$. Pri $z = 1$ jo lahko iz vrednotimo kot

$$g_{3/2}(1) = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 2.612, \quad (26)$$

kjer je $\zeta(s)$ Riemannova zeta funkcija. Obenem ima funkcija $g_{3/2}(1)$ v tej točki neskončen odvod.



Slika 2. Funkcija $g_{3/2}(z)$ za $z \leq 1$.

Iz enačbe (24) lahko izračunamo temperaturo prehoda v stanje kondenzata, kot

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{k_B m} \left(\frac{n}{2.612} \right)^{2/3}, \quad (27)$$

kjer numerična vrednost 2.612 predstavlja vrednost funkcije $g_{3/2}(1)$. Pod temperaturo T_c postane kemični potencial plina enak 0. To pomeni, da postane zasedenost osnovnega stanja z $E(k) = 0$ makroskopska, torej predstavlja v limiti $V \rightarrow \infty$ število delcev v stanju E_0 nek končen delež vseh delcev v sistemu. Pri tem je N v tej limiti prav tako $N \rightarrow \infty$, kar sledi iz Bose-Einsteinove porazdelitve za stanje z energijo $E_0 = 0$, kar seveda pomeni, da je tudi število delcev v osnovnem stanju neskončno

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}. \quad (28)$$

Tako moramo v enačbi (23) člen n_0 obravnavati posebej,

$$n = n_0 + \frac{(mk_B T)^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \sqrt{x} dx. \quad (29)$$

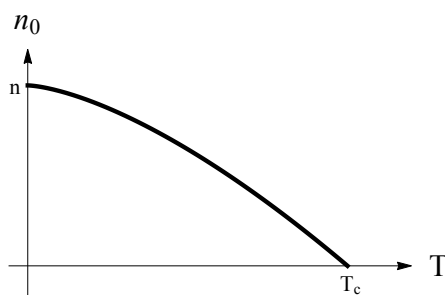
Iz enačbe (28) pa lahko prek Taylorjevega razvoja eksponenta izrazimo kemični potencial kot

$$\mu \sim -k_B T \frac{1}{N_0}. \quad (30)$$

Gornji integral ponovno prepisemo v polilogaritem ter upoštevamo rezultat za n_0 , ki ga izrazimo iz enačbe (24), pri čemer za temperaturo vstavimo $T = T_c$. Tako dobimo enačbo za zasedenost najnižjega stanja v Bose-Einsteinovem kondenzatu

$$\frac{n_0}{n} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}. \quad (31)$$

Jasno je, da bodo pri $T = 0$ vsi delci v osnovnem stanju, kar podpira tudi dobljena enačba.



Slika 3. Odvisnost števila delcev v najnižjem stanju od temperature.

Iz tega lahko sedaj izračunamo povprečno energijo delcev kot

$$u = \frac{1}{n} (k_B T)^{5/2} \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}} \int_0^\infty \frac{ze^{-x}}{1 - ze^{-x}} x^{3/2} dx. \quad (32)$$

Za $T > T_c$ dobimo

$$u = \frac{3}{2} k_B T \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}, \quad (33)$$

medtem ko nam obnašanje energije pri $T < T_c$ opisuje funkcija

$$u = \frac{3}{2} k_B \frac{T^{5/2} g_{5/2}(1)}{T_c^{3/2} g_{3/2}(1)}, \quad (34)$$

kjer je $g_{5/2}(1) = 1.342$.

Iz zgornjih enačb je razvidno, da pri velikih $T \gg T_c$ pridemo do klasične limite

$$u(T) \sim \frac{3}{2} k_B T, \quad (35)$$

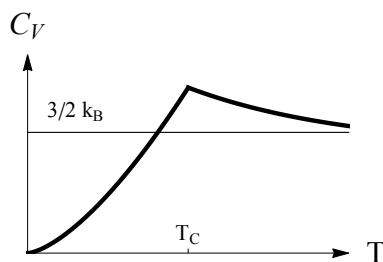
kar pomeni, da postane Bose-Einsteinova porazdelitev za velike T enaka Maxwellovi. Takrat so kvantne lastnosti sistemov pomembne le pri $T \sim T_c$.

Da opazimo fazni prehod, si moramo ogledati odvisnost ene od makroskopskih količin od temperature, na primer odvisnost toplotne kapacitete (C_V). To lahko izračunamo prek

$$C_V = \frac{\partial u}{\partial T}, \quad (36)$$

pri čemer predpostavimo konstantno številsko gostoto delcev n . V limiti, ko je $T \gg T_c$ dobimo $C_V \sim 3k_B/2$, kar se sklada s klasično teorijo. Za primer $T < T_c$ pa dobimo odvisnost

$$C_V = \frac{15}{4} \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} k_B. \quad (37)$$



Slika 4. Odvisnost $C_V(T)$

Dobljena odvisnost $C_V(T)$ izkazuje očitno nezveznost odvoda v točki T_c . Fazni prehod spada v skupino zveznih faznih prehodov, za katere velja, da za prehod ni potrebno dodati latentne toplote. To je v tem primeru pričakovano, saj je prehod posledica statistike delcev in ne spremembe v sami strukturi snovi.

Jasno je torej, da je Bose-Einsteinov kondenzat posebno stanje snovi, kjer je število delcev v vseh posamičnih stanjih, razen v najnižjem energijskem stanju, z makroskopskega vidika, majhno.

1.3 Bose-Einsteinov kondenzat v \mathcal{N} dimenzijah

1.3.1 Masivni delci

V zgornji izpeljavi smo predpostavili, da je naš sistem 3-dimenzionalen.

Izkaže se, da Bose-Einsteinov kondenzat za masivne delce v manj kot 3 dimenzijah ne obstaja³ [7]. Z vpeljavo drugih dimenzij se primerno spremeni enačba (4). Tako dobimo v dveh dimenzijah nov izraz za skupno število delcev

$$N = \frac{2\pi mA}{h^2\beta} g_1(z), \quad (38)$$

kjer ponovno uvedemo $z = e^{\beta\mu}$ in $A = L^2$, kar predstavlja površino sistema. Podobno kot prej tudi tokrat pošljemo $T \rightarrow 0$ in s tem $z \rightarrow 1$, vendar pa je ta izraz enak $g_1(1) = \zeta(1) \rightarrow \infty$. Funkcija pri $T \rightarrow 0$ torej divergira, kar pomeni, da Bose-Einsteinov kondenzat v 2 dimenzijah za masivne delce ne obstaja.

³To je tudi poseben primer Mermin-Wagnerjevega izreka [7], ki za primer Bose-Einsteinove kondenzacije masivnih delcev napoveduje v 2 dimenzijah temperaturo prehoda 0 K, ter v 1 dimenziji prepoveduje obstoj kondenzata pri vseh temperaturah.

Podobno lahko dokažemo za 1-dimenzionalen primer, kjer dobimo enačbo

$$N = \frac{L}{2\hbar} \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}} g_{1/2}(z). \quad (39)$$

Tu funkcija $g_{1/2}(z)$ pri $z \rightarrow 1$ ponovno divergira, kar pomeni da Bose-Einsteinov kondenzat za 1-dimenzionalne sisteme masivnih delcev ni mogoč.

Zapišemo lahko tudi splošno enačbo za masivne delce v \mathcal{N} dimenzijah in sicer za primer $\mu \rightarrow 0$

$$N \sim \int_0^\infty \frac{e^{(\mathcal{N}-2)/2}}{e^{\beta(E-\mu)} - 1} dE \sim \zeta\left(\frac{\mathcal{N}}{2}\right). \quad (40)$$

1.3.2 Brezmasni delci

Druga predpostavka zgornje izpeljave so bili masivni delci. Izkaže se, da za brezmasne delce veljajo drugačne enačbe.

V primeru masivnih delcev je disperzijska relacija $E(k)$ kvadratična, medtem ko je v primeru brezmasnih delcev podana z zvezo, ki jo poznamo iz posebne teorije relativnosti

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \rightarrow E = \hbar c k. \quad (41)$$

Iz tega lahko izpeljemo nove relacije za N pri pogoju $\mu \rightarrow 0$ v \mathcal{N} dimenzijah

$$N \sim \int_0^\infty \frac{e^{(\mathcal{N}-1)}}{e^{\beta(E-\mu)} - 1} dE \sim \zeta(\mathcal{N}). \quad (42)$$

Opazimo, da lahko v primeru brezmasnih delcev Bose-Einsteinov kondenzat obstaja za vse dimenzije nad $\mathcal{N} = 1$, za razliko od masivnih delcev, kjer je to res za dimenzije nad $\mathcal{N} = 2$.

2. Bose-Einsteinova kondenzacija svetlobe

Kot vemo, lahko svetlobo opišemo kot tok fotonov, torej delcev, za katere velja, da imajo celoštevilsko lastno vrtilno količino ali spin. To pomeni, da lahko za fotone pričakujemo, da sledijo Bose-Einsteinovi porazdelitvi ter, da bodo pri dovolj nizki temperaturi sistema prešli v Bose-Einsteinov kondenzat. Vendar pa se izkaže, da eden najbolj znanih primerov bozonskega plina, sevanje črnega telesa, ne izkazuje teh lastnosti. Razlog za to je v tem, da v primeru, ko gre $T \rightarrow 0$ črno telo enostavno absorbira vso svetlobo in je ne izseva nazaj, kar lahko razložimo z uporabo Stefanovega zakona

$$j = \sigma T^4. \quad (43)$$

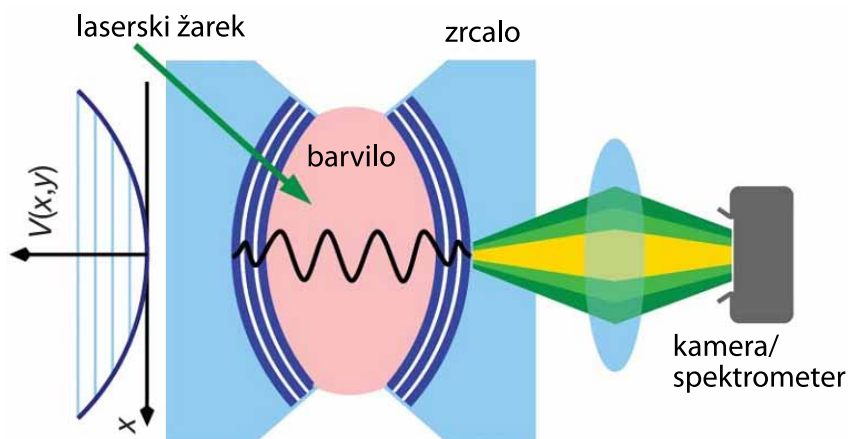
To torej pomeni, da kljub temu, da enačbe dopuščajo obstoj Bose-Einsteinovega kondenzata tudi za brezmasne delce, le-tega praktično ni mogoče doseči. Temu se raziskovalci v sledečem eksperimentu izognejo tako, da fotonom pripišejo efektivne mase.

2.1 Postavitev eksperimenta

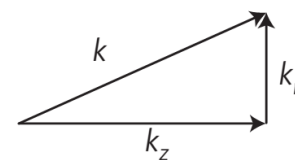
Med dve zrcali s krivinski radijem $R = 1$ m, ki sta oddaljeni za $D_0 \cong 1.46 \mu\text{m}$, je vstavljena majhna količina barvila, katerega absorpcijske in emisijske lastnosti so izbrane tako, da maksimizirajo življenski čas fotonov z določenim longitudinalnim številom, ki vstopijo v barvilo.

Kot vemo, lahko z zrcali omejimo možne valovne načine elektro-magnetnega valovanja. To pomeni, da imamo v tem primeru v smeri z diskreten spekter možnih valovnih dolžin, medtem ko je v smeri r spekter zvezen. V tem poskusu imamo torej opravka z dvodimenzionalnim sistemom. Poleg tega zrcali dodata harmonični potencial, zaradi česar se večina fotonov zbira v središču eksperimentalnega območja.

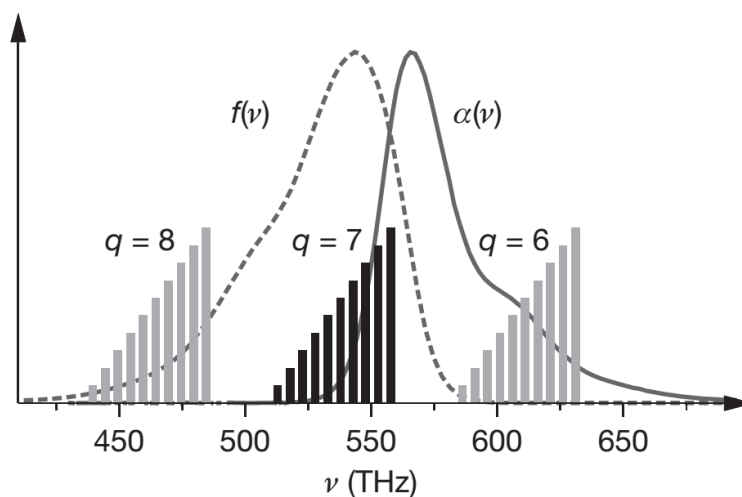
Barvilo, ki se nahaja med zrcali, je izbrano tako, da njegov emisijski in absorpcijski spekter dovoljujeta daljši obstoj le fotonom z longitudinalnim številom $q = 7$, kar je lepo razvidno iz Slike 7.



Slika 5. Postavitev eksperimenta in efektivni potencial zrcal. Spremenjeno z dovoljenjem Macmillan Publishers Ltd: Nature (J. Klaers *et al.*, Nature **468**, 545 (2010)), copyright (2010).



Slika 6. Smeri z in r , kot bodo uporabljene v naši izpeljavi. Spremenjeno z dovoljenjem Macmillan Publishers Ltd: Nature Physics (J. Klaers, F. Vewinger and M. Weitz, Nat.Phys. **6**, 513 (2010)), copyright (2010).



Slika 7. Dovoljene valovne dolžine in absorpcijska ($\alpha(\nu)$) ter emisijska ($f(\nu)$) spektra barvila. Spremenjeno z dovoljenjem Macmillan Publishers Ltd: Nature (J. Klaers *et al.*, Nature **468**, 545 (2010)), copyright (2010).

Za doseganje Bose-Einsteinovega kondenzata je zaželjeno, da se število delcev ohranja. V opisanem sistemu lahko izgubo fotonov pripišemo izgubam energije, ki se porabijo za mrežna nihanja snovi, ter dejstvu, da nobeno zrcalo ni popolno, torej del fotonov absorbira. Ta problem so zaobšli tako, da v sistem konstantno dovajajo nove fotone s pomočjo laserja. Tako se sčasoma vzpostavi ravnovesje med izgubami in dovedenimi fotoni. Lahko rečemo, da se v povprečju število fotonov v sistemu ohranja.

2.2 Teorija

Da bi dosegli Bose-Einsteinovo kondenzacijo svetlobe, bi torej morali imeti fotone z maso. V določenih primerih pa lahko tudi brezmasnim delcem pripišemo efektivne mase. V primeru tega eksperimenta so s samo postavitvijo eksperimenta zagotovili, da so imeli vsi fotoni energijo omejeno

navzdol z najnižjim dovoljenim nihajnim načinom v smeri z . Torej je

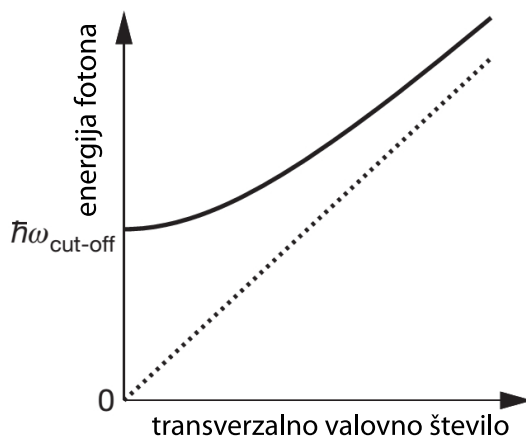
$$E_{min} = \hbar\omega_{cutoff} , \quad (44)$$

kjer ω_{cutoff} predstavlja frekvenco najnižjega dovoljenega nihajnega načina.

Ker so fotoni v eni dimenziji omejeni na določen nihajni način, v drugi pa prosti, jim lahko pripišemo disperzijsko relacijo oblike

$$E(k_r) = \sqrt{E_{min}^2 + c^2\hbar^2k_r^2} , \quad (45)$$

kakršno poznamo že iz valovnih vodnikov. Za majhne k_r lahko relacijo opišemo s prvim členom razvoja in tako dobimo kvadratično disperzijsko relacijo. To pomeni, da lahko delcem pripišemo efektivno maso.



Slika 8. Disperzijska relacija opisanih fotonov. Spremenjeno z dovoljenjem Macmillan Publishers Ltd: Nature (J. Klaers *et al.*, Nature **468**, 545 (2010)), copyright (2010).

To storimo tako, da izenačimo E_{min} z mirovno energijo, saj ta energija predstavlja primer, ko je gibalna količina fotona v smeri r enaka 0. Dobimo

$$m_f = \frac{\hbar\omega_{cutoff}}{c^2} , \quad (46)$$

kjer m_f predstavlja efektivno maso fotonov.

Z izbiro razdalje med zrcali in izbiro barvila so dosegli najnižjo dovoljeno energijo fotonov v votlini $E_{min} \approx 3.8$ eV, iz česar lahko določimo efektivno maso fotonov $m_f \approx 3.8$ eV/ c^2 , kar je precej nad termično energijo pri $T = 300$ K, ki znaša $E_T \approx 1/40$ eV. Fotoni imajo v smeri z omejeno energijo, medtem ko se v smeri r termalizirajo na energijo barvila, v katerem se nahajajo. Pričakovati je torej, da se bo njihova frekvenca od minimalne razlikovala za $\approx k_B T/\hbar$. Kot posledico te termalizacije lahko pričakujemo, da se bo pri nizkih temperaturah večina delcev nabrala v najnižjem dovoljenem energijskem stanju, torej bo sistem prešel v Bose-Einsteinov kondenzat.

Tu seveda še nismo upoštevali, da je sistem zaradi omejitve gibanja fotonov na dve prostorski dimenziji efektivno dvodimenzionalen, smo pa fotonom pripisali efektivno maso. To seveda pomeni, da v tem sistemu Bose-Einsteinova kondenzacija ni mogoča. Na srečo pa se izkaže, da je bila izpeljava za Bose-Einsteinovo kondenzacijo v našem primeru narejena brez zunanjih potencialov, v primeru eksperimenta pa so fotoni zaprti med dve zrcali, ki za sistem predstavljata efektivni harmonični potencial. Če to upoštevamo v izpeljavi⁴ za Bose-Einsteinovo kondenzacijo je le-ta mogoča tudi v 2 dimenzijah.

V izpeljavah Bose-Einsteinove kondenzacije v prvem poglavju smo se osredotočili na iskanje mejne vrednosti temperature, pri kateri pride do Bose-Einsteinove kondenzacije. Vendar pa lahko pogoje izpolnimo tudi pri konstantni temperaturi in sicer z večanjem številske gostote delcev v sistemu. V praksi je to možno le v določenih primerih, kot na primer, pri Bose-Einsteinove kondenzaciji svetlobe.

⁴Pri tem gre za Gross-Pitaevskii-jev model Bose-Einsteinove kondenzacije za šibko sklopljene sisteme.

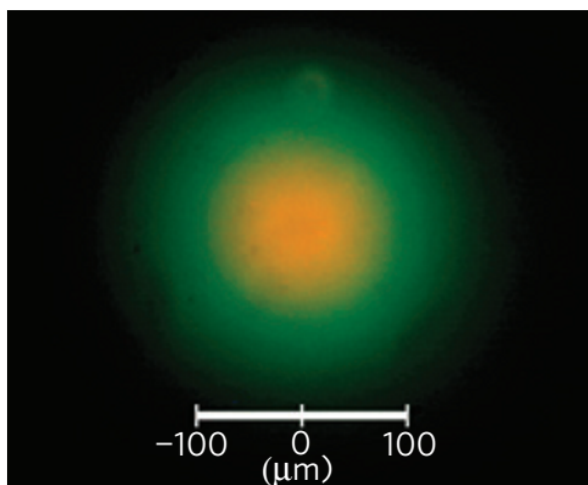
V primeru opisanega eksperimenta dobimo pogoj za mejno število delcev

$$N_c = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^2. \quad (47)$$

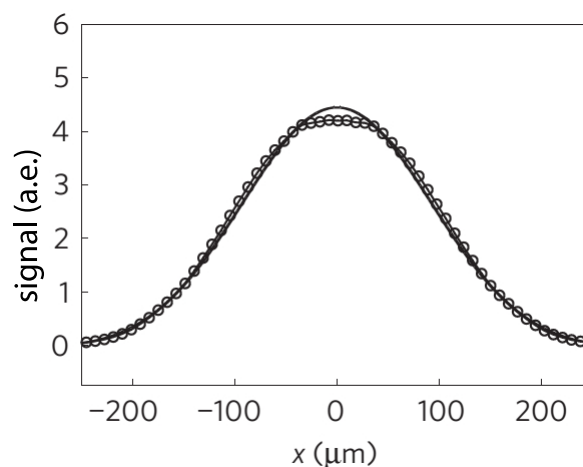
Pri sobni temperaturi $T = 300$ K znaša ta vrednost $N_c \cong 77000$, seveda pa to velja le za ta primer, saj je med drugim odvisna od oblike in velikosti potenciala, v katerega so ujeti delci.

2.3 Rezultati eksperimenta

Pri številih fotonov pod kritično vrednostjo N_c Bose-Einsteinova kondenzacija ni pričakovana, vendar pa je zaradi harmoničnega potenciala zrcal vseeno pričakovana večja koncentracija fotonov v središču eksperimentalne votline. To je posledica harmonskega potenciala, ki ga čutijo fotoni med zrcali.

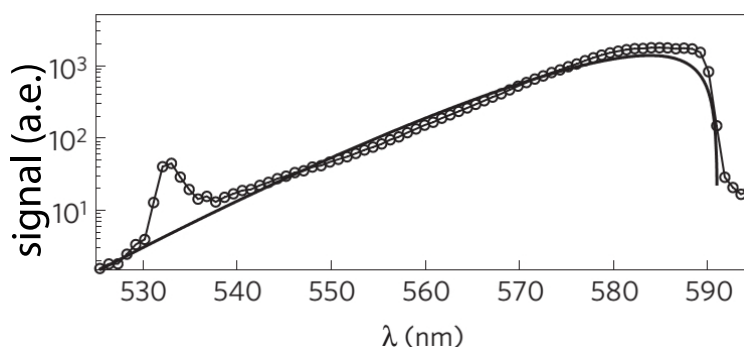


Slika 9. Slika porazdelitve fotonov po votlini. Spremenjeno z dovoljenjem Macmillan Publishers Ltd: Nature Physics (J. Klaers, F. Vewinger and M. Weitz, Nat.Phys. **6**, 514 (2010)), copyright (2010).



Slika 10. Porazdelitev fotonov v odvisnosti od oddaljenosti od središča sistema. Spremenjeno z dovoljenjem Macmillan Publishers Ltd: Nature Physics (J. Klaers, F. Vewinger and M. Weitz, Nat.Phys. **6**, 514 (2010)), copyright (2010).

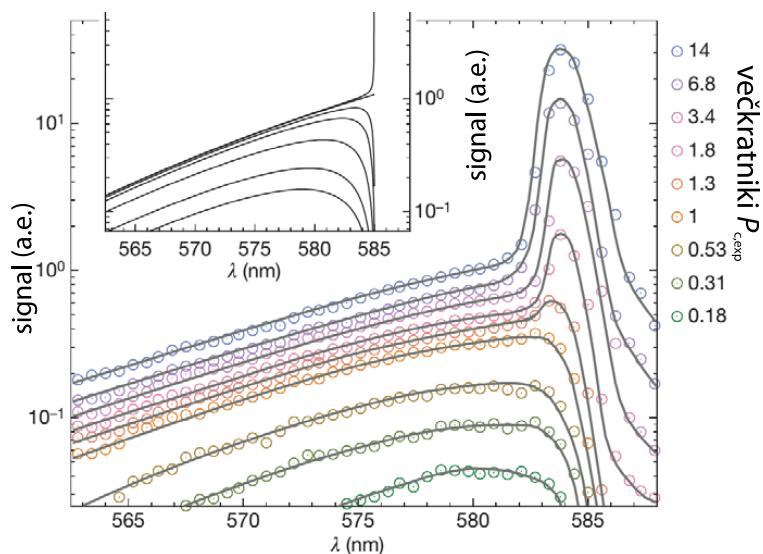
Na zgornjem grafu je opazna povečana koncentracija svetlobe v središču, kar je v skladu s pričakovanji.



Slika 11. Zastopanost določenih frekvenc v barvilu. Spremenjeno z dovoljenjem Macmillan Publishers Ltd: Nature Physics (J. Klaers, F. Vewinger and M. Weitz, Nat.Phys. **6**, 514 (2010)), copyright (2010).

Iz porazdelitve fotonov po valovnih dolžinah vidimo, da v tem primeru ne pride do Bose-Einsteinove kondenzacije. Opazimo sicer vrh pri ≈ 532 nm, vendar pa je to le ostanek laserske svetlobe, s katero so vzdrževali število fotonov v votlini.

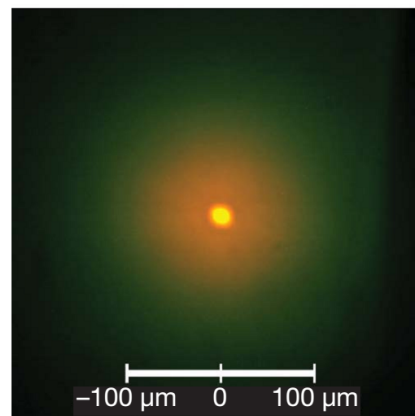
V primeru tega eksperimenta se Bose-Einsteinova kondenzacija pojavi pri moči laserja $P_{c,exp} = (1.55 \pm 0.60)W$, oziroma številu fotonov v votlini $N_{c,exp} = (6.3 \pm 2.4) \times 10^4$, kar je v skladu s teoretično napovedjo. Takrat se zgornje porazdelitve spremenijo. Poveča se gostota svetlobe v središču votline, kar sicer ni direktno povezano z Bose-Einsteinovo kondenzacijo. Bolj zanimiv je graf odvisnosti števila fotonov od valovno dolžine, na katerem se opazi očiten vrh v bližini λ_{cutoff} .



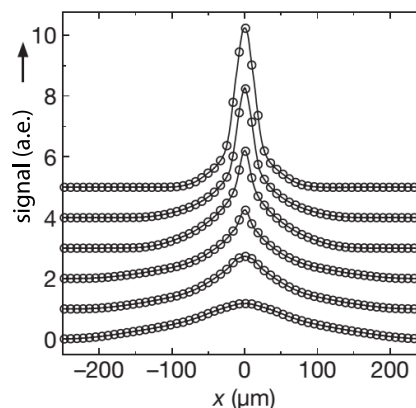
Slika 12. Zastopanost frekvenc pri različnih močeh laserja. Spremenjeno z dovoljenjem Macmillan Publishers Ltd: Nature (J. Klaers *et al.*, Nature **468**, 547 (2010)), copyright (2010).

Pri močeh laserja nad kritično močjo $P_{c,exp}$ opazimo izrazito večjo zastopanost najnižjega energijskega stanja fotonov z $\lambda \approx 584$ nm, kar ustreza $E \approx 2.1$ eV. To se sklada z napovednjo Bose-Einsteinovega kondenzata, kjer naj bi se velik delež sistema nahajal v najnižjem stanju. Od ostalih je torej ločen v prostoru gibalnih količin in ne v navadnem prostoru, kot je to značilno za navadne kondenzate, od koder je tudi dobil svoje ime.

Razlog za povečanje koncentracije fotonov v sredini eksperimenta pa je posledica, tega, da imajo fotoni v stanju E_0 velikost valovnega vektorja v smeri r enako $k_r = 0$. Torej se zberejo v središču sistema, kjer je potencial zrcal najmanjši.



Slika 13. Slika porazdelitve fotonov v votlini pri Bose-Einsteinovi kondenzaciji sistema. Spremenjeno z dovoljenjem Macmillan Publishers Ltd: Nature (J. Klaers *et al.*, Nature **468**, 547 (2010)), copyright (2010).



Slika 14. Porazdelitev fotonov v oddaljenosti od središča sistema pri različnih močeh laserja. Spremenjeno z dovoljenjem Macmillan Publishers Ltd: Nature (J. Klaers *et al.*, Nature **468**, 545 (2010)), copyright (2010).

Zaključek

Bose-Einsteinov kondenzat je stanje snovi, v katerem večina delcev zaseda najnižje dovoljeno energijsko stanje. Je eden od treh kvantnih pojavov katerih posledice so opazne tudi na makroskopskem nivoju.

V tem seminarju smo si ogledali relativno nov eksperiment, v katerem so pokazali obstoj Bose-Einsteinovega kondenzata za kvante svetlobe, fotone.

Potencialne uporabe tega pojava so, med drugim, izboljšanje učinkovitosti kolektorskih sončnih elektrarn, nov vir koherentne ultravijolične svetlobe, ki deluje na podlagi spontane emisije, ter seveda raziskovanje lastnosti Bose-Einsteinovih kondenzatov zelo šibko sklopljenih sistemov, kamor spada tudi fotonski plin.

Zahvala

Za pomoč pri ustvarjanju članka bi se rad zahvalil dr. Martinu Klanjšku.

LITERATURA

- [1] E.A. Cornell, C.E. Wieman, M.R. Matthews, J.R. Ensher in M.H. Anderson, *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*, *Science* **269** (1995), 198–201.
- [2] W. Ketterle, D.M. Kurn, D.S. Durfee, N.J. van Druten, M.R. Andrews, M.-O. Mewes in K.B. Davis, *Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms*, *Physics Review Letters* **75** (1995), 3969–3973.
- [3] J. Klaers, J. Schmitt, F. Vewinger in M. Weitz, *Bose-Einstein condensation of photons in an optical microcavity*, *Nature* **468** (2010), 545–548.
- [4] T. Giamarchi, C. Rüegg in O. Tchernyshyov, *Bose-Einstein condensation in magnetic insulators*, *Nature Physics* **4** (2008), 198–204.
- [5] J.F. Annett, *Superconductivity, Superfluids and Condensates*, Oxford University Press, 2004.
- [6] L. Lewin, *Polylogarithms and Associated Functions*, Elsevier Science Ltd., 1981.
- [7] H. Wagner in N.D. Mermin, *Absence of Ferromagnetism or Antiferromagnetism in One- or Two-Dimensional Isotropic Heisenberg Models*, *Physics Review Letters* **17** (1996), 1133–1136.
- [8] J. Klaers, F. Vewinger in M. Weitz, *Thermalization of a two-dimensional photonic gas in a ‘white-wall’ photon box*, *Nature Physics* **6** (2010), 512–515.